Karlsruhe Institut für Technologie (KIT) Sommersemester 2020
Institut für Analysis
apl.Prof. Dr. P. C. Kunstmann
Dr. S. Wugalter
M.Sc.. M. Ullmann

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 8. Tutoriumsblatt

Aufgabe 1

Schreibe $\vec{f} =: (f_1, f_2)$. Da $\mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängend ist und die Verträglichkeitsbedingung

$$\partial_x f_2(x,y) = \partial_x(x^2+y^2) = 2x = \partial_y(2xy) = \partial_y f_1(x,y) \qquad \text{auf } \mathbb{R}^2$$

erfüllt ist, stellt $\vec{f}$ ein Potentialfeld dar, d.h. es gibt ein Skalarfeld $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ mit $\vec{f} = \nabla\varphi$. Wegen $\partial_x\varphi(x,y) = f_1(x,y) = 2xy$ ist $\varphi(x,y) = x^2y + \psi(y)$ für eine stetig differenzierbare Funktion $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Aus $\partial_y\varphi(x,y) = f_2(x,y)$ und $\partial_y\varphi(x,y) = x^2 + \psi'(y)$ folgt $\psi'(y) = y^2$. Dies ist beispielsweise für $\psi(y) = \frac{1}{3}y^3$ erfüllt. Somit ist

$$\varphi(x,y) = x^2y + \frac{1}{3}y^3$$

ein Potential von $\vec{f}$ auf $\mathbb{R}^2$. Die Arbeit A ist gleich dem Wert des Kurvenintegrals

$$A = \int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s},$$

welches nur vom Anfangs- und Endpunkt der Kurve γ abhängt:

$$A = \varphi(-1,2) - \varphi(0,0) = \frac{14}{3}.$$

Aufgabe 2

i) Wir benutzen die Definition des Kurvenintegrals:

$$\begin{aligned}
&\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_0^{\ln 2} \vec{v}(\gamma(t)) \cdot \gamma(t)\,dt = \int_0^{\ln 2} \begin{pmatrix} \cosh t \\ -\sinh t \\ \sinh t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cosh t \\ \sinh t \\ \cosh t \end{pmatrix} dt \\
&= \int_0^{\ln 2} (\cosh^2 t - \sinh^2 t + \sinh t \cosh t)\,dt = \int_0^{\ln 2} (1 + \sinh t \cosh t)\,dt \\
&= \ln 2 + \left[\tfrac{1}{2}\sinh^2 t\right]_0^{\ln 2} = \ln 2 + \tfrac{1}{2}\sinh^2(\ln 2) = \ln 2 + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}(e^{\ln 2} - e^{-\ln 2})\right)^2 = \ln 2 + \tfrac{9}{32}.
\end{aligned}$$

ii) Die Kurven $\gamma_1\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma_1(t) = (t,0)$, und $\gamma_2\colon [1,2] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma_2(t) = (1, t-1)$, sind regulär und es gilt $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$. Somit liegt die Situation aus Bemerkung 20.1 (d) vor:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} &= \int_{\gamma_1} \vec{v} \cdot d\vec{s} + \int_{\gamma_2} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 \vec{v}(\gamma_1(t)) \cdot \dot{\gamma}_1(t)\,dt + \int_1^2 \vec{v}(\gamma_2(t)) \cdot \dot{\gamma}_2(t)\,dt \\
&= \int_0^1 \begin{pmatrix} \sin t \\ t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt + \int_1^2 \begin{pmatrix} \sin 1 \\ 1 + (t-1)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt \\
&= \int_0^1 \sin t\,dt + \int_1^2 \left(1 + (t-1)^2\right) dt \\
&= \left[-\cos t\right]_0^1 + \left[t + \tfrac{1}{3}(t-1)^3\right]_1^2 = (-\cos 1 + 1) + (2 + \tfrac{1}{3} - 1) = \tfrac{7}{3} - \cos 1.
\end{aligned}$$

Aufgabe 3

a) Das Vektorfeld $\vec{v}_\alpha$ ist stetig differenzierbar und auf (der einfach zusammenhängenden Menge) $\mathbb{R}^2$ definiert. Daher ist $\vec{v}_\alpha$ genau dann ein Potentialfeld, falls die Verträglichkeitsbedingung erfüllt ist, d.h. falls gilt

$$\partial_x(\vec{v}_{\alpha,2}(x,y)) = \partial_y(\vec{v}_{\alpha,1}(x,y)) \quad \text{für alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Wegen $\partial_x(\vec{v}_{\alpha,2}(x,y)) = \partial_x(4xy + 3y^2) = 4y$ und $\partial_y(\vec{v}_{\alpha,1}(x,y)) = \partial_y(2(x+y^\alpha)) = 2\alpha y^{\alpha-1}$ ist dies genau dann der Fall, wenn $\alpha = 2$ ist.

Wir berechnen nun ein Potential für $\vec{v}_2$, d.h. ein C^1-Skalarfeld $w : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $\nabla w = \vec{v}_2$ in $\mathbb{R}^2$. Es gilt also:

$$\begin{aligned}
& w_x(x,y) = 2(x+y^2) \\
\Rightarrow\ & w(x,y) = x^2 + 2xy^2 + \tilde{w}(y) \\
\Rightarrow\ & w_y(x,y) = 4xy + \tilde{w}'(y) \overset{!}{=} 4xy + 3y^2 \\
\Rightarrow\ & \tilde{w}'(y) = 3y^2 \Rightarrow \tilde{w}(y) = y^3 + c \quad (c \in \mathbb{R})
\end{aligned}$$

Ein Potential für $\vec{v}_2$ ist somit gegeben durch $w(x,y) = x^2 + 2xy^2 + y^3$.

b) Da $\vec{v}_2$ ein Potentialfeld ist mit zugehörigem Potential w, gilt

$$\int_\gamma \vec{v}_2 \cdot d\vec{s} = \int_\gamma \nabla w \cdot d\vec{s} = w(1,-1) - w(0,0) = 2 - 0 = 2.$$

Die Kurve γ kann durch $\gamma(t) = (t,-t)^T$, $t \in [0,1]$ parametrisiert werden. Nach Definition des Kurvenintegrals ist

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \vec{v}_3 \cdot d\vec{s} &= \int_0^1 \vec{v}_3(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)\, dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} 2(t-t^3) \\ -4t^2 + 3t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} dt \\
&= \int_0^1 2t - 2t^3 + t^2\, dt = \left[t^2 - \tfrac{1}{2}t^4 + \tfrac{1}{3}t^3\right]_0^1 = \frac{5}{6}.
\end{aligned}$$