Karlsruhe Institut für Technologie (KIT) Sommersemester 2020
Institut für Analysis
apl.Prof. Dr. P. C. Kunstmann
Dr. S. Wugalter

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 9. Tutoriumsblatt

Aufgabe 1

Offenbar ist der Integrand jeweils eine stetige Funktion.

a) Es gilt

$$\iint\limits_{[0,1]\times[0,1]} (xy+y^2)\,d(x,y) = \int_0^1\int_0^1 (xy+y^2)\,dy\,dx = \int_0^1 \left[\tfrac12 xy^2+\tfrac13 y^3\right]_{y=0}^1 dx$$
$$= \int_0^1 \left(\tfrac12 x+\tfrac13\right) dx = \left[\tfrac14 x^2+\tfrac13 x\right]_0^1 = \tfrac14+\tfrac13 = \tfrac{7}{12}\,.$$

b) Diesmal ergibt sich

$$\iint\limits_{[-1,0]\times[0,2]} \cosh(2x+y)\,d(x,y) = \int_{-1}^0\int_0^2 \cosh(2x+y)\,dy\,dx = \int_{-1}^0 \big[\sinh(2x+y)\big]_{y=0}^2 dx$$
$$= \int_{-1}^0 \big(\sinh(2x+2)-\sinh(2x)\big)\,dx = \left[\tfrac12\cosh(2x+2)-\tfrac12\cosh(2x)\right]_{-1}^0$$
$$= \big(\tfrac12\cosh 2-\tfrac12\cosh 0\big)-\big(\tfrac12\cosh 0-\tfrac12\cosh(-2)\big) = \cosh 2-1\,.$$

Rechnet man den hyperbolischen Cosinus noch aus, so erhält man $\frac12(e^2+e^{-2})-1$.

Aufgabe 2

Setzen wir $\vec v(x,y) := (v_1(x,y), v_2(x,y))$ mit $v_1(x,y) := -x^2y$ und $v_2(x,y) := xy$, dann ist $\vec v$ auf $\mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar und es gilt $\partial_1 v_2(x,y)-\partial_2 v_1(x,y) = y+x^2$. Der Gaußsche Integralsatz liefert

$$\iint\limits_G (x^2+y)\,d(x,y) = \iint\limits_G (\partial_1 v_2(x,y)-\partial_2 v_1(x,y))\,d(x,y) = \oint_{\partial G} \vec v\cdot d\vec s.$$

Der positiv orientierte Rand ∂G der offenen Einheitskreisscheibe G ist gegeben durch die reguläre Kurve $\gamma(t) = (\cos t,\sin t)$ mit $0\leqslant t\leqslant 2\pi$. Folglich ergibt sich

$$\iint\limits_G (x^2+y)\,d(x,y) = \int_0^{2\pi} \vec v(\gamma(t))\cdot\dot\gamma(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\cos^2 t\,\sin t\\ \cos t\,\sin t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix} dt$$
$$= \int_0^{2\pi} \big(\cos^2 t\,\sin^2 t+\sin t\cos^2 t\big)\,dt \overset{(*)}{=} \int_0^{2\pi}\big(\tfrac14\sin^2(2t)+\sin t\cos^2 t\big)\,dt$$
$$= \tfrac14\int_0^{2\pi}\sin^2(2t)\,dt-\left[\tfrac13\cos^3 t\right]_{t=0}^{2\pi} \overset{(**)}{=} \tfrac18\int_0^{4\pi}\sin^2(u)\,du$$
$$= \tfrac18\left(\tfrac12\int_0^{4\pi}\sin^2(u)\,du+\tfrac12\int_0^{4\pi}\sin^2(u)\,du\right)$$
$$\overset{(***)}{=} \tfrac18\left(\tfrac12\int_0^{4\pi}\sin^2(u)\,du+\tfrac12\int_0^{4\pi}\cos^2(u)\,du\right)$$
$$= \tfrac18\left(\tfrac12\int_0^{4\pi} 1\,du\right) = \tfrac18\cdot\tfrac{4\pi}{2} = \tfrac{\pi}{4}\,.$$

Hierbei verwendeten wir in $(*)$ das Additionstheorem des Sinus $2\sin t\,\cos t = \sin(2t)$, in $(**)$ die Substitution $u = 2t$ und in $(***)$ die Identität $\int_0^{4\pi} \sin^2 t\,dt = \int_0^{4\pi} \cos^2 t\,dt$.

Aufgabe 3

Die Lösung finden Sie unter
http://www.math.kit.edu/iana1/seite/hm/