Karlsruhe Institut für Technologie (KIT) Sommersemester 2020
Institut für Analysis
apl.Prof. Dr. P. C. Kunstmann
Dr. S. Wugalter
M.Sc.. M. Ullmann

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 10. Tutoriumsblatt

Aufgabe 1

Zunächst berechnen wir $\oint_\gamma (\vec{v}\cdot\vec{N})\,ds$. direkt mittels der Definition des Kurvenintegrals:
Definiere die regulären Kurven

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &\colon [0,1]\to\mathbb{R}^2\,,\ \gamma_1(t) = (2t,0)\,,\\
\gamma_2 &\colon [1,2]\to\mathbb{R}^2\,,\ \gamma_2(t) = (4-2t,t-1)\,,\\
\gamma_3 &\colon [2,3]\to\mathbb{R}^2\,,\ \gamma_3(t) = (0,3-t)\,,
\end{aligned}$$

Es gilt

$$\oint_\gamma (\vec{v}\cdot\vec{N})\,ds = \int_{\gamma_1}(\vec{v}\cdot\vec{N})\,ds + \int_{\gamma_2}(\vec{v}\cdot\vec{N})\,ds + \int_{\gamma_3}(\vec{v}\cdot\vec{N})\,ds$$

Für die drei Kurvenintegrale auf der rechten Seite ergibt sich

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_1}(\vec{v}\cdot\vec{N})\,ds &= \int_0^1 (\vec{v}(\gamma_1(t))\cdot\vec{N})\,||\dot{\gamma}_1(t)||\,dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} t\\ 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\,dt = 0,\\
\int_{\gamma_2}(\vec{v}\cdot\vec{N})\,ds &= \int_1^2 \begin{pmatrix} 2\\ (t-1)^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\,dt = 2\int_1^2 (t^2-2t+2)\,dt = \frac{8}{3}\,,\\
\int_{\gamma_3}(\vec{v}\cdot\vec{N})\,ds &= \int_2^3 \begin{pmatrix} 2(3-t)\\ (3-t)^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}\,dt = \int_2^3 (2t-6)\,dt = -1\,,
\end{aligned}$$

und
Zusammen folgt

$$\oint_\gamma (\vec{v}\cdot\vec{N})\,ds = \frac{5}{3}$$

Es gilt $\operatorname{div}\vec{v} = 1+2y$ Unter Verwendung des Divergenz Satzes in der Ebene lässt sich das Kurvenintegral folgendermaßen ausrechnen:

$$\oint_\gamma (\vec{v}\cdot\vec{N})\,ds \iint_G \operatorname{div}\vec{v}\,d(x,y) = \iint_G (1+2y)\,d(x,y)\,.\int_0^2\int_0^{1-\frac{x}{2}}(1+2y)\,dy\,dx = \frac{5}{3}$$

Aufgabe 2

Zunächst berechnen wir $\int_\gamma \vec{v}\cdot d\vec{s}$ direkt mittels der Definition des Kurvenintegrals:
Definiere wie in der Aufgabe 1 die regulären Kurven

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &\colon [0,1]\to\mathbb{R}^2\,,\ \gamma_1(t) = (2t,0)\,,\\
\gamma_2 &\colon [1,2]\to\mathbb{R}^2\,,\ \gamma_2(t) = (4-2t,t-1)\,,\\
\gamma_3 &\colon [2,3]\to\mathbb{R}^2\,,\ \gamma_3(t) = (0,3-t)\,,
\end{aligned}$$

Es gilt

$$\int_{\gamma_1} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 (\vec{v}(\gamma_1(t)) \cdot \dot{\gamma}_1(t)\, dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} 4t^2 \\ 2t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} dt = \frac{8}{3}\,,$$

$$\int_{\gamma_2} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_1^2 (\vec{v}(\gamma_2(t)) \cdot \dot{\gamma}_2(t)\, dt = \int_1^2 \begin{pmatrix} (4-2t)^2 \\ 8-4t-(t-1)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} dt = -1\,,$$

$$\int_{\gamma_3} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_2^3 (\vec{v}(\gamma_3(t)) \cdot \dot{\gamma}_3(t)\, dt = \int_2^3 \begin{pmatrix} 0 \\ -(t-3)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} dt = \frac{1}{3}\,,$$

Zusammen folgt, dass

$$\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} = 2$$

Nach dem Gaußschen Integralsatz gilt

$$\oint_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \iint_G \left(\partial_x(2x - y^2) - \partial_y x^2\right) d(x,y) = \iint_G 2\, d(x,y) = 2,$$

Aufgabe 3

Die Lösung können Sie unter http://www.math.kit.edu/iana1/seite/hm/ finden.