Karlsruhe Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
apl.Prof. Dr. P. C. Kunstmann
Dr. S. Wugalter
M.Sc.. M. Ullmann

Sommersemester 2020

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 11. Tutoriumsblatt

Aufgabe 1

Wir teilen die Menge B in zwei Teile. Die Menge B_1 sei durch $x \geq 0$, $y \geq 0$,$z \geq 0$, und $x+y+2z \leq 1$ definiert und sei $B_2 = B \setminus B_1$. Es gilt

$$\operatorname{vol}(B) = \operatorname{vol}(B_1) + \operatorname{vol}(B_2) = 2 \cdot \operatorname{vol}(B_1) = 2 \iiint\limits_{B_1} d(x,y,z) = 2 \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{(1-x-y)/2} dz\,dy\,dx =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x-y)\,dy\,dx = \int_0^1 \frac{1}{2}(1-x)^2\,dx = \frac{1}{6}\,.$$

Aufgabe 2

Seien $R \geqslant r \geqslant 0$. Geometrische Überlegungen führen auf

$$\begin{aligned} A &= \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, r^2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant R^2,\, x \geqslant 0,\, y \geqslant 0\big\} \\ &= \big\{(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi) \,:\, r \leqslant \varrho \leqslant R,\, 0 \leqslant \varphi \leqslant \tfrac{\pi}{2}\big\}. \end{aligned}$$

Nun seien $R \geqslant 0$ und $a > 0$. Die Bedingung $x \geqslant 0$ bedeutet $\cos\varphi \geqslant 0$, also $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ oder $\varphi \in [\frac{3}{2}\pi, 2\pi]$. Zusätzlich muss wegen $y \geqslant ax$ die Ungleichung $\sin\varphi \geqslant a\cos\varphi$ gelten. Diese ist für kein $\varphi \in [\frac{3}{2}\pi, 2\pi]$ erfüllt. Auf $[0, \frac{\pi}{2}]$ gilt $\sin\varphi \geqslant a\cos\varphi$ für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ und $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2})$ mit $\tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} \geqslant a$, also $\varphi = \frac{\pi}{2}$ oder $\varphi \geqslant \arctan a \in (0, \frac{\pi}{2})$. Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} B &= \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 \leqslant R^2,\, x \geqslant 0,\, y \geqslant ax\big\} \\ &= \big\{(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi) \,: 0 \leqslant \varrho \leqslant R,\, \arctan a \leqslant \varphi \leqslant \tfrac{\pi}{2}\big\}. \end{aligned}$$

Aufgabe 3

Mit Polarkoordinaten $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ lässt sich die Menge $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < y, 1 < x^2+y^2 < 4\}$ durch $r \in (1,2)$ und $\varphi \in (\pi/4, \pi/2)$ charakterisieren. Somit ergibt sich mit der Transformationsformel

$$\iint\limits_B x^2 y\,d(x,y) = \iint\limits_{(1,2)\times(\pi/4,\pi/2)} r^3\cos^2\varphi\,\sin\varphi\,r\,d(r,\varphi) = \int_1^2 \int_{\pi/4}^{\pi/2} r^4\cos^2\varphi\,\sin\varphi\,d\varphi\,dr$$

$$= \int_1^2 r^4\big[-\tfrac{1}{3}\cos^3\varphi\big]_{\varphi=\pi/4}^{\varphi=\pi/2} dr = \tfrac{1}{3}\big(0 + \tfrac{1}{\sqrt{2}^3}\big) \int_1^2 r^4\,dr = \tfrac{1}{3}\,\tfrac{\sqrt{2}}{4}\,\big[\tfrac{1}{5}r^5\big]_{r=1}^{r=2} = \tfrac{31}{60}\,\sqrt{2}\,.$$

Aufgabe 4

Die Lösung kann man unter http://www.math.kit.edu/iana1/seite/hm
finden.