Karlsruhe Institut für Technologie (KIT) Sommersemester 2020
Institut für Analysis
apl.Prof. Dr. P. C. Kunstmann
Dr. S. Wugalter
M.Sc.. M. Ullmann

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 12. Tutoriumsblatt

Aufgabe 1

Wir berechnen zunächst die Volumina der beiden Mengen: Die Menge

$$M = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \tfrac{1}{16}x^2 + \tfrac{1}{8}y^2 + z^2 \leqslant 1 \}$$

ist ein Ellipsoid, und es gilt $M = \Phi(K)$ für

$$K := \{ (u,v,w) \in \mathbb{R}^3 : u^2 + v^2 + w^2 \leqslant 1 \}, \qquad \Phi(u,v,w) := (4u, \sqrt{8}\,v, w).$$

Aus der Vorlesung ist bekannt: $\operatorname{vol}(K) = \frac{4}{3}\pi$. Wegen

$$\det \Phi'(u,v,w) = \det \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{8} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4\sqrt{8} = 8\sqrt{2}$$

liefert die Transformationsformel also

$$\operatorname{vol}(M) = \iiint\limits_{\Phi(K)} 1 \, d(x,y,z) = \iiint\limits_{K} 1 \cdot |8\sqrt{2}| \, d(u,v,w) = 8\sqrt{2}\operatorname{vol}(K) = \tfrac{32}{3}\sqrt{2}\,\pi$$

[vgl. Aufgabe **3 a)** mit $a = 4$, $b = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, $c = 1$]. Für die neue Marzipankartoffel ergibt sich

$$\begin{aligned}
\operatorname{vol}(\widetilde{M}) &= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \int_{-\sqrt{3-x^2}\sqrt{3-y^2}}^{\sqrt{3-x^2}\sqrt{3-y^2}} 1 \, dz \, dy \, dx \\
&= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} 2\sqrt{3-x^2}\sqrt{3-y^2} \, dy \, dx \\
&= 2\Big(\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{3-x^2} \, dx \Big)\Big(\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{3-y^2} \, dy \Big) = 2\Big(\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{3-x^2} \, dx \Big)^2;
\end{aligned}$$

mit der Substitution $x = \sqrt{3}\,t$, $dx = \sqrt{3}\,dt$ folgt

$$= 2\Big(\int_{-1}^{1} \sqrt{3-3t^2} \cdot \sqrt{3} \, dt \Big)^2 = 18\Big(\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2} \, dt \Big)^2,$$

und die Substitution $t = \sin\tau$, $dt = \cos\tau \, d\tau$ liefert

$$= 18\Big(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2\tau}\, \cos\tau \, d\tau \Big)^2 = 18\Big(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\tau \, d\tau \Big)^2.$$

Wegen $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\tau \, d\tau = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2\tau \, d\tau = \frac{\pi}{2}$ folgt $\operatorname{vol}(\widetilde{M}) = \frac{9}{2}\pi^2$.

Nun gilt es noch festzustellen, ob der Quotient $\operatorname{vol}(\widetilde{M})/\operatorname{vol}(M)$ größer oder kleiner als das Preisverhältnis 0,97 ist. Statt zum neumodischen Taschenrechner zu greifen, zeigen wir $\operatorname{vol}(\widetilde{M})/\operatorname{vol}(M) < 0{,}97$ allein durch Verwendung der Abschätzungen $\pi < 3{,}2$ und $\sqrt{2} > 1{,}4$:

$$\frac{\operatorname{vol}(\widetilde{M})}{\operatorname{vol}(M)} = \frac{\frac{9}{2}\pi^2}{\frac{32}{3}\sqrt{2}\,\pi} = \frac{27\pi}{64\sqrt{2}} < \frac{27 \cdot 3{,}2}{64 \cdot 1{,}4} = \frac{27}{28} = 1 - \frac{1}{28} = 1 - \frac{3}{84} < 1 - \frac{3}{100} = 0{,}97.$$

Also: Wir kaufen die bewährte Marzipankartoffel, da wir auf diese Weise pro Geldeinheit mehr Volumen bekommen.

Aufgabe 2

Mit Polarkoordinaten $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ lässt sich die Menge $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < y, 1 < x^2 + y^2 < 4\}$ durch $r \in (1,2)$ und $\varphi \in (\pi/4, \pi/2)$ charakterisieren. Somit ergibt sich mit der Transformationsformel

$$\iint\limits_B x^2 y \, d(x,y) = \iint\limits_{(1,2)\times(\pi/4,\pi/2)} r^3 \cos^2\varphi \, \sin\varphi \, r \, d(r,\varphi) = \int_1^2 \int_{\pi/4}^{\pi/2} r^4 \cos^2\varphi \, \sin\varphi \, d\varphi \, dr$$

$$= \int_1^2 r^4 \big[-\tfrac{1}{3}\cos^3\varphi\big]_{\varphi=\pi/4}^{\varphi=\pi/2} dr = \tfrac{1}{3}\big(0 + \tfrac{1}{\sqrt{2}^3}\big) \int_1^2 r^4 \, dr = \tfrac{1}{3} \tfrac{\sqrt{2}}{4} \big[\tfrac{1}{5} r^5\big]_{r=1}^{r=2} = \tfrac{31}{60} \sqrt{2} \, .$$

Aufgabe 3

Eine Parameterdarstellung von $\mathcal{F} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x < 8, y^2 < 9x, z = 2\sqrt{x}\}$ ist gegeben durch

$$\vec{g}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2\sqrt{x} \end{pmatrix} \quad \text{für } (x,y) \in U := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 8, -3\sqrt{x} < y < 3\sqrt{x}\} \, .$$

Für den Flächeninhalt von $\mathcal{F}$ gilt

$$\iint\limits_{\mathcal{F}} do = \iint\limits_U \big\|\partial_x \vec{g}(x,y) \times \partial_y \vec{g}(x,y)\big\|_2 \, d(x,y) = \iint\limits_U \Big\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{x}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Big\|_2 \, d(x,y)$$

$$= \int_0^8 \int_{-3\sqrt{x}}^{3\sqrt{x}} \sqrt{\tfrac{1}{x} + 1} \, dy \, dx = \int_0^8 \big(3\sqrt{x} - (-3\sqrt{x})\big) \sqrt{\tfrac{1}{x} + 1} \, dx$$

$$= 6 \int_0^8 \sqrt{1+x} \, dx = 6 \big[\tfrac{2}{3}(1+x)^{3/2}\big]_0^8 = 4(3^3 - 1) = 104 \, .$$

Aufgabe 4

Die Lösung kann man unter http://www.math.kit.edu/iana1/seite/hm
finden.