

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik
10. Übungsblatt

Aufgabe 50

- a) Berechnen Sie das Volumen der Menge

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x \leq 2, 0 \leq z \leq x^2 - y^2\}.$$

- b) Bestimmen Sie für alle $a, b, c > 0$ das Volumen $\iiint_E d(x, y, z)$ des Ellipsoids

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \leq 1 \right\}.$$

Aufgabe 51

- a) Die beschränkte Menge $B \subset \mathbb{R}^3$ sei durch die Ebenen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ und $x + y + 2z = 1$ begrenzt. Berechnen Sie das Integral $\iiint_B \sin z \, d(x, y, z)$.

- b) Berechnen Sie für die Menge

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1, x^2 + y^2 \leq (1 - z)^2\}$$

das Integral

$$\iiint_B (x^2 + y^2)^2 e^{2(1-z)^7} d(x, y, z).$$

- c) Sei $B := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \|(x, y, z)\| \leq 2\}$. Eine kugelförmige Gasansammlung besitze die Massendichte

$$\rho(x, y, z) = \begin{cases} \frac{1}{1 + x^2 + y^2 + z^2} & \text{für } 0 \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq 1, \\ 2 & \text{für } 1 < \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq 2. \end{cases}$$

Berechnen Sie die gesamte Masse

$$\iiint_B \rho(x, y, z) d(x, y, z).$$

Aufgabe 52

Berechnen Sie den Flächeninhalt von $\mathcal{F} = \{(x, y, x^2 + y^2) : (x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Aufgabe 53

Gegeben seien der Kegel $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 2 - \sqrt{x^2 + y^2}\}$ sowie das Vektorfeld $\vec{f}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{f}(x, y, z) = (z, y, z + 1)$. Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes \vec{f} durch die Oberfläche des Kegels K nach außen.

Aufgabe 54

Für das elektrostatische Potential $U(\vec{a})$ einer mit der Dichte ϱ homogen geladenen Fläche $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ im Punkt $\vec{a} \notin \mathcal{F}$ gilt nach Coulomb

$$U(\vec{a}) = \varrho \iint_{\mathcal{F}} \frac{1}{\|\vec{x} - \vec{a}\|} d\sigma.$$

Bestimmen Sie $U(\vec{a})$ in $\vec{a} = (0, 0, 1)$, falls \mathcal{F} der durch $0 \leq z \leq 1$ beschränkte Teil des Kegelmantels $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = x^2 + y^2\}$ ist.

Hinweis: Es gilt $\int_0^1 \frac{r}{\sqrt{2r^2 - 2r + 1}} dr = -\frac{1}{2} \sqrt{2} \ln(\sqrt{2} - 1)$.

Zur Teilnahme an der **Übungsklausur** am Samstag, den 07.07.2012, von 09:00 bis 11:00 Uhr ist keine Anmeldung erforderlich. Die Klausur findet im **Benz-Hörsaal** statt. Weitere Informationen zur Übungsklausur finden Sie auf der Vorlesungshomepage.

Die **Prüfung** zur HM II findet am Montag, den 17.09.2012, statt.

Zur Teilnahme ist eine Anmeldung erforderlich. **Anmeldeschluss: Freitag, der 20.07.2012.**

Weitere Informationen zur Prüfung entnehmen Sie bitte der Vorlesungshomepage

<http://www.math.kit.edu/iana1/lehre/hm2phys2012s/>.