

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

8. Übungsblatt

Aufgabe 1

Sei $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 \leq 3\}$ und γ eine positiv orientierte Parametrisierung von ∂U . Für $(u, v) \in U$ definiere $\Phi(u, v) = (u, v, v^2 - u^2)$ und betrachte die Fläche

$$S = \{\Phi(u, v) \mid (u, v) \in U\},$$

deren Rand $\partial S = \Phi(\partial U)$ durch $\Phi \circ \gamma$ parametrisiert sei. Berechnen Sie für das Vektorfeld

$$G(x, y, z) = \begin{pmatrix} z - 5y \\ 9x - 3z \\ y - 2x \end{pmatrix}$$

das Kurvenintegral $\int_{\partial S} G \cdot d\vec{x}$ unter Verwendung des Stokesschen Integralsatzes.

Aufgabe 2

Die Oberfläche von $Z := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$ wird mit S bezeichnet und es sei

$$G(x, y, z) := \begin{pmatrix} x^3 \\ x^2 y \\ x^2 z \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie

$$\int_S G \cdot n \, d\sigma,$$

wobei n der Normaleneinheitsvektor ist, der ins Äußere des Zylinders Z weist, auf zwei verschiedene Arten, nämlich

- mittels der Definition des Oberflächenintegrals;
- unter Verwendung des Gaußschen Integralsatzes.

Aufgabe 3

Gegeben seien der Kegel $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 2 - \sqrt{x^2 + y^2}\}$ sowie das Vektorfeld $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (z, y, z + 1)$. Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes f durch die Oberfläche des Kegels K nach außen.

Aufgabe 4

Sei $\Omega = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 < u < 1, 0 < v < 2\pi\}$ und sei $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\Phi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v),$$

und sei K das Vektorfeld $K(x, y, z) = (y, -x, 0)$. Berechnen Sie den Fluss $\int_S K \cdot n \, d\sigma$ von K durch die Fläche $S := \Phi(\Omega)$.

Aufgabe 5

Sei $E \subset \mathbb{R}^3$ die kompakte Menge, die vom Paraboloiden $z = 1 - x^2 - y^2$ und der Ebene $z = 0$ berandet wird. Sei S der Rand von E . Weiterhin sei F das Vektorfeld $F(x, y, z) = (y, x, z)$. Berechnen Sie den Fluss $\int_S F \cdot n \, d\sigma$ von F durch die Fläche S .