

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

12. Übungsblatt

Aufgabe 1

Berechnen Sie folgende Integrale mit Hilfe des Residuensatzes:

a) $\int_{|z|=2} \frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2} dz$

b) $\int_{|z|=9} \frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2} dz$

c) $\int_{|z|=1} \frac{z}{e^{iz} - 1} dz$

d) $\int_{|z|=2} \exp\left(\frac{z}{1-z}\right) dz$

e) $\int_{\partial G} \frac{2z}{(z-1)(z+2)(z+i)} dz$ mit $G := \{z \in \mathbb{C} : -3 < \operatorname{Re} z < 2, -2 < \operatorname{Im} z < 3\}$

Aufgabe 2

Zeigen Sie:

a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2} dx = \frac{\pi}{2a} \quad (a > 0 \text{ fest})$

b) $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{(1+x^2)^3} dx = \frac{7\pi}{16e}$

Aufgabe 3

Sei $-1 < a < 1$. Berechnen Sie das Integral $\int_0^{2\pi} \frac{1}{1-2a \cos t + a^2} dt$ auf zwei unterschiedliche Weisen:

- Durch geeignete Substitution.
- Mit Hilfe des Residuensatzes.

Aufgabe 4

a) Sei $n \geq 2$ gerade. Berechnen Sie das Integral $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n}$.

b) Sei $n \geq 3$ ungerade. Berechnen Sie abermals $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n}$.