Karlsruher Institut für Technologie (KIT) SS 2013
Institut für Analysis 06.07.2013
Prof. Dr. Tobias Lamm
Dr. Patrick Breuning

Übungsklausur

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Aufgabe 1 ((3+3+4) Punkte)

a) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \sin(xy)$. Bestimmen Sie die kritischen Punkte von f und entscheiden Sie jeweils, ob es sich um ein lokales Minimum, lokales Maximum oder um einen Sattelpunkt handelt.

b) Sei $g(x,y) = e^{-2x^2-y^2}(x^2+2y^2)$. Bestimmen Sie das Maximum und das Minimum von g auf der Menge $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2+y^2 \leqslant 4\}$.

c) Sei $h(x,y,z) = 4x - 2y$. Bestimmen Sie das Maximum und das Minimum von h auf der Menge $N = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2z - x - y = 4,\ x^2+z^2 = 1\}$.

Aufgabe 2 ((6+4) Punkte)

a) i) Bestimmen Sie eine Funktion $h(x,y,z)$, so dass das Vektorfeld

$$G(x,y,z) = (h(x,y,z), e^y \sin x, e^z \sin x)$$

ein Gradientenfeld ist. Bestimmen Sie anschließend ein Potential von G.

ii) Sei $\gamma : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (t, \sin t, \sin t)$. Berechnen Sie $\int_\gamma G \cdot \vec{dx}$.

iii) Sei γ wie in ii) und sei $F(x,y,z) = (0, e^y \sin x, e^z \sin x)$. Berechnen Sie $\int_\gamma F \cdot \vec{dx}$.

b) Sei $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z = 1,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0\}$. Der Rand ∂E sei von oben betrachtet im Gegenuhrzeigersinn orientiert. Weiterhin sei $H(x,y,z) = (y\cos(2\pi x), e^x + 2, 1 - y(z-1))$. Berechnen Sie mit dem Satz von Stokes das Kurvenintegral

$$\int_{\partial E} H \cdot \vec{dx}.$$

– bitte wenden –

Aufgabe 3 ((6+4) Punkte)

a) Sei $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 4 - x^2 - y^2,\ 0 < z < 4\}$.

i) Zeigen Sie, dass S eine 2-dimensionale C^∞-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist.

ii) Sei $F(x, y, z) = \Big(x(y + y^2) - \frac{x^3}{3}, x^2y - \frac{1}{2}y^2 - \frac{y^3}{3}, z + (x^3 + 1)y\Big)$. Sei ferner n die stetige Einheitsnormale auf S, die ins Kegeläußere zeigt. Berechnen Sie mit dem Integralsatz von Gauß den Fluss von F durch die mit n orientierte Fläche S.

b) Berechnen Sie

$$\int_E \frac{e^z}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}\, d\mu,$$

wobei E die Teilmenge der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4$ ist, die innerhalb des Zylinders $x^2 + y^2 = 1$ und oberhalb der xy-Ebene liegt.

Aufgabe 4 ((2+4+4) Punkte)

a) Zeigen Sie, dass die Gleichung $2z^5 + \sin(xy) + x^3 - y^2 + xz = 2$ in einer Umgebung von $(0, 0, 1)$ nach z aufgelöst werden kann. Berechnen Sie für die dadurch implizit definierte Funktion $g(x, y)$ die Ableitung $Dg(0, 0)$.

b) Sei $f : \mathbb{R} \times (0, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = (\arcsin y)^x$. Berechnen Sie das Taylorpolynom zweiter Ordnung von f im Punkt $p = (2, \frac{1}{2})$. *Hinweis:* Es gilt $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$.

c) Berechnen Sie die Laurent-Reihe der Funktion $\frac{z^2-1}{z^2+1}$ für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - 1| > 2$.

Viel Erfolg!

Nach der Klausur: Die korrigierten Übungsklausuren können ab Dienstag, den 16.07.2013, im Sekretariat (Zimmer 3B-02, Allianzgebäude 05.20) abgeholt werden.

Fragen zur Korrektur sind in den Tutoraten der letzten Woche, sowie am Freitag, den 19.07.2013, 13:00 – 13:30 Uhr in Zimmer 3B-06 (Allianzgebäude) möglich.