Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Tobias Lamm
Dr. Patrick Breuning

SS 2013
06.07.2013

Übungsklausur

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Aufgabe 1 ((3+3+4) Punkte)

a) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \sin(xy)$. Bestimmen Sie die kritischen Punkte von f und entscheiden Sie jeweils, ob es sich um ein lokales Minimum, lokales Maximum oder um einen Sattelpunkt handelt.

b) Sei $g(x, y) = e^{-2x^2-y^2}(x^2 + 2y^2)$. Bestimmen Sie das Maximum und das Minimum von g auf der Menge $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + y^2 \leqslant 4\}$.

c) Sei $h(x, y, z) = 4x-2y$. Bestimmen Sie das Maximum und das Minimum von h auf der Menge $N = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2z - x - y = 4,\ x^2 + z^2 = 1\}$.

Lösung:

a) Es gilt grad $f(x, y) = (y\cos(xy), x\cos(xy))^t = 0$ genau dann, wenn $x = y = 0$ oder $xy = \frac{\pi}{2} + k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Damit sind die kritischen Punkte

$$y_0 = (0, 0) \quad \text{und} \quad y_{x,k} = \left(x, \frac{\pi + 2k\pi}{2x}\right) \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ \ k \in \mathbb{Z}.$$

Die Hessematrix von f ist gegeben durch

$$D^2f(x, y) = \begin{pmatrix} -y^2\sin(xy) & -xy\sin(xy) + \cos(xy) \\ -xy\sin(xy) + \cos(xy) & -x^2\sin(xy) \end{pmatrix}.$$

Damit ist $D^2f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Die Matrix $D^2f(0, 0)$ hat die Eigenwerte 1 und -1. Also ist y_0 ein Sattelpunkt. Ferner gilt $-1 \leqslant f(x, y) \leqslant 1$ und $f(y_{x,k}) = \sin(\frac{\pi}{2} + k\pi) = (-1)^k$. Also ist $y_{x,k}$ ein lokales Maximum falls k gerade, und ein lokales Minimum falls k ungerade.

b) Zunächst bestimmen wir die kritischen Punkte im Inneren von M. Dazu berechnen wir

$$\text{grad } g(x, y) = 2e^{-2x^2-y^2}\left(x(1 - 2x^2 - 4y^2), y(2 - x^2 - 2y^2)\right)^t.$$

Die Gleichung grad $g(x, y) = 0$ führt auf die Lösungen $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(0, -1)$, $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ (beachte dass $1 - 2x^2 - 4y^2 = 0 = 2 - x^2 - 2y^2$ zu einem Widerspruch führt). Alle diese Lösungen liegen in M.

Nun untersuchen wir g auf kritische Punkte auf dem Rand ∂M. Für $(x, y) \in \partial M$ gilt $2x^2 + y^2 = 4$, also $y^2 = 4 - 2x^2$ und $-\sqrt{2} \leqslant x \leqslant \sqrt{2}$. Wir setzen $\tilde{g} : [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \to \mathbb{R}$, $\tilde{g}(x) = e^{-4}(-3x^2 + 8)$. Es ist $\tilde{g}'(x) = -6e^{-4}x$, also $\tilde{g}'(x) = 0$ für $x = 0$. Also wird das Maximum und Minimum auf ∂M jeweils auf einem Punkt (x, y) angenommen mit

$$(x^2, y^2) = (0, 4) \qquad \text{oder} \qquad (x^2, y^2) = (2, 0).$$

Wir berechnen $g(0, 0) = 0$, $g(0, 1) = g(0, -1) = \frac{2}{e}$, $g(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) = g(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) = \frac{1}{4e}$, $g(0, 2) = g(0, -2) = \frac{8}{e^4}$, $g(\sqrt{2}, 0) = g(-\sqrt{2}, 0) = \frac{4}{e^4}$. Damit ist 0 das Minimum und $\frac{2}{e}$ das Maximum von g auf M.

c) Zunächst ist N abgeschlossen und beschränkt, also kompakt. Da h stetig ist, wird das Maximum und Minimum auf N angenommen. Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z) = (2z - x - y - 4, x^2+z^2-1)^t$. Dann ist $N = f^{-1}(\{0\})$ und es gilt $Df(x,y,z) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2x & 0 & 2z \end{pmatrix}$, insbesondere gilt rang $Df(p) = 2$ für alle $p \in N$ (da dann nicht $x = z = 0$ gelten kann). Nach dem Satz über Extrema mit Nebenbedingungen gibt es $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit grad $h(x,y,z) = \lambda_1$grad $f_1(x,y,z) + \lambda_2$grad $f_2(x,y,z)$, also mit $(4,-2,0)^t = \lambda_1(-1,-1,2)^t + \lambda_2(2x,0,2z)^t$. Mit der Definition von N führt dies auf die fünf Gleichungen

$$\begin{aligned} -\lambda_1 + 2x\lambda_2 &= 4, \\ -\lambda_1 &= -2, \\ 2\lambda_1 + 2z\lambda_2 &= 0, \\ 2z - x - y - 4 &= 0, \\ x^2 + z^2 - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Gl. 2 liefert $\lambda_1 = 2$, Gl. 1 liefert $x\lambda_2 = 3$, Gl. 3 liefert $z\lambda_2 = -2$, also $-\frac{3}{2}z\lambda_2 = x\lambda_2$. Wegen $\lambda_2 \neq 0$ folgt $x = -\frac{3}{2}z$. Gl. 5 führt dann auf $z = \frac{2}{\sqrt{13}}$ oder $z = -\frac{2}{\sqrt{13}}$, also $x = -\frac{3}{\sqrt{13}}$ oder $x = \frac{3}{\sqrt{13}}$. Schließlich liefert Gl. 4, dass $y = \frac{7}{\sqrt{13}} - 4$ oder $y = -\frac{7}{\sqrt{13}} - 4$.

Also sind die kritischen Stellen $p_1 = \left(-\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{7}{\sqrt{13}} - 4, \frac{2}{\sqrt{13}}\right)$, $p_2 = \left(\frac{3}{\sqrt{13}}, -\frac{7}{\sqrt{13}} - 4, -\frac{2}{\sqrt{13}}\right)$. Es gilt $h(p_1) = -2\sqrt{13} + 8$, $h(p_2) = 2\sqrt{13} + 8$. Also ist das Maximum $2\sqrt{13} + 8$ und das Minimum $-2\sqrt{13} + 8$.

Aufgabe 2 ((6+4) Punkte)

a) i) Bestimmen Sie eine Funktion $h(x,y,z)$, so dass das Vektorfeld

$$G(x,y,z) = (h(x,y,z), e^y \sin x, e^z \sin x)$$

ein Gradientenfeld ist. Bestimmen Sie anschließend ein Potential von G.

ii) Sei $\gamma : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (t, \sin t, \sin t)$. Berechnen Sie $\int_\gamma G \cdot d\vec{x}$.

iii) Sei γ wie in ii) und sei $F(x,y,z) = (0, e^y \sin x, e^z \sin x)$. Berechnen Sie $\int_\gamma F \cdot d\vec{x}$.

b) Sei $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0\}$. Der Rand ∂E sei von oben betrachtet im Gegenuhrzeigersinn orientiert. Weiterhin sei $H(x,y,z) = (y\cos(2\pi x), e^x + 2, 1 - y(z-1))$. Berechnen Sie mit dem Satz von Stokes das Kurvenintegral

$$\int_{\partial E} H \cdot d\vec{x}.$$

Lösung:

a) i) Es muss gelten rot $G = 0$. Wir berechnen

$$\begin{aligned} \text{rot } G &= (\partial_y G_3 - \partial_z G_2, \partial_z G_1 - \partial_x G_3, \partial_x G_2 - \partial_y G_1) \\ &= (0, \partial_z h - e^z \cos x, e^y \cos x - \partial_y h). \end{aligned}$$

Dies führt auf $\partial_z h(x,y,z) = e^z \cos x$, $\partial_y h(x,y,z) = e^y \cos x$. Dies ist bspw. erfüllt für $h(x,y,z) = (e^y + e^z)\cos x$. Da $\mathbb{R}^3$ einfach zusammenhängend ist, ist die Bedingung rot $G = 0$ auch hinreichend dafür, dass G ein Gradientenfeld ist.

Für ein Potential $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^3)$ gilt grad $\varphi = G$, also $\partial_x \varphi = (e^y + e^z)\cos x$, $\partial_y \varphi = e^y \sin x$, $\partial_z \varphi = e^z \sin x$. Dies ist erfüllt für $\varphi(x,y,z) = (e^y + e^z)\sin x$.

ii) Da φ ein Potential von G ist, gilt

$$\int_\gamma G \cdot \vec{dx} = \varphi\left(\gamma\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) - \varphi(\gamma(0)) = \varphi\left(\frac{\pi}{2}, 1, 1\right) - \varphi(0,0,0) = (e+e)\cdot 1 - 0 = 2e.$$

iii) Mit dem Ergebnis von ii) gilt

$$\begin{aligned}
\int_\gamma F \cdot \vec{dx} &= \int_\gamma G \cdot \vec{dx} - \int_\gamma (h,0,0) \cdot \vec{dx} \\
&= 2e - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \langle (h(\gamma(t)),0,0), (1, \cos t, \cos t)\rangle \, dt \\
&= 2e - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin t} \cdot \cos t \, dt \\
&= 2e - 2[e^{\sin t}]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 2e - 2(e-1) \\
&= 2.
\end{aligned}$$

b) Für Punkte $(x,y,z) \in E$ gilt $0 \leqslant y \leqslant 1$, $0 \leqslant x \leqslant 1-y$, $z = 1-x-y$. Sei $U = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 0 < v < 1,\, 0 < u < 1-v\}$. Die Ebene E wird parametrisiert durch $\Phi : U \to \mathbb{R}^3$, $\Phi(u,v) = (u, v, 1-u-v)$. Damit ist $\partial_u\Phi = (1,0,-1)$, $\partial_v\Phi = (0,1,-1)$ und $\partial_u\Phi \times \partial_v\Phi = (1,1,1)$. Damit ist $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$ eine stetige Einheitsnormale. Ist E durch n orientiert, so wird ∂E im positiven Sinne durchlaufen. Nach dem Satz von Stokes gilt

$$\int_{\partial E} H \cdot \vec{dx} = \int_E \operatorname{rot} H \cdot n \, d\sigma.$$

Wir berechnen

$$\operatorname{rot} H = (1-z, 0, e^x - \cos(2\pi x)).$$

Ferner ist $d\sigma = \sqrt{3}\, d\mu(u,v)$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\int_{\partial E} H \cdot \vec{dx} &= \int_E \frac{1}{\sqrt{3}}(1 - z + e^x - \cos(2\pi x)) \, d\sigma \\
&= \int_U 1 - (1-u-v) + e^u - \cos(2\pi u) \, d\mu(u,v) \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-v} u + v + e^u - \cos(2\pi u) \, du \, dv \\
&= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}u^2 + uv + e^u - \frac{1}{2\pi}\sin(2\pi u)\right]_{u=0}^{u=1-v} dv \\
&= \int_0^1 \left(-\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2} + e^{1-v} + \frac{1}{2\pi}\sin(2\pi v)\right) dv \\
&= \left[-\frac{1}{6}v^3 - \frac{1}{2}v - e^{1-v} - \frac{1}{4\pi^2}\cos(2\pi v)\right]_0^1 \\
&= -\frac{5}{3} + e.
\end{aligned}$$

Aufgabe 3 ((6+4) Punkte)

a) Sei $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 4 - x^2 - y^2,\, 0 < z < 4\}$.

i) Zeigen Sie, dass S eine 2-dimensionale C^∞-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist.

ii) Sei $F(x,y,z) = \left(x(y+y^2) - \frac{x^3}{3}, x^2y - \frac{1}{2}y^2 - \frac{y^3}{3}, z + (x^3+1)y\right)$. Sei ferner n die stetige Einheitsnormale auf S, die ins Kegeläußere zeigt. Berechnen Sie mit dem Integralsatz von Gauß den Fluss von F durch die mit n orientierte Fläche S.

b) Berechnen Sie

$$\int_E \frac{e^z}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\,d\mu,$$

wobei E die Teilmenge der Kugel $x^2+y^2+z^2 \leqslant 4$ ist, die innerhalb des Zylinders $x^2+y^2=1$ und oberhalb der xy-Ebene liegt.

Lösung:

a) i) Sei $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z < 4\}$ und $f : \Omega \to \mathbb{R} = \mathbb{R}^{3-2}$, $f(x,y,z) = 4 - x^2 - y^2 - z$. Damit ist f eine C^∞-Abbildung mit $S \cap \Omega = f^{-1}(\{0\})$ und rang $Df(x,y,z) =$ rang $(-2x,-2y,-1) = 1$. Die Aussage folgt nun aus dem Niveaumengenkriterium.

ii) Der Fluss ist gegeben durch $\int_S F \cdot n\, d\sigma$. Wir betrachten den Kegel $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z < 4,\ x^2+y^2 \leqslant 4-z\}$. Da n ins Kegeläußere zeigt, gilt nach dem Integralsatz von Gauß

$$\int_S F \cdot n\, d\sigma = \int_K \text{div } F\, d\mu - \int_{B_2(0)\times\{0\}} F \cdot (0,0,-1)\, d\sigma$$

mit $B_2(0) \subset \mathbb{R}^2$, wobei wir verwendet haben, dass der Boden von K nicht zu S gehört. Es gilt $\int_{B_2(0)\times\{0\}} F \cdot (0,0,-1)\, d\sigma = \int_{B_2(0)} -(x^3+1)y\, d\mu(x,y) = 0$ (für die letzte Gleichheit beachte $-(x^3+1)(-y) = -(-(x^3+1)y)$ und verwende Fubini). Wir berechnen

$$\text{div } F = y + y^2 - x^2 + x^2 - y - y^2 + 1 = 1.$$

Der Kegel hat das Volumen $\mu(K) = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ mit $r = 2$ und $h = 4$, also $\mu(K) = \frac{16}{3}\pi$. Also gilt $\int_S F \cdot n\, d\sigma = \frac{16}{3}\pi$.

b) Wir verwenden Zylinderkoordinaten. Mit der Transformationsformel und geeigneter Integrationsreihenfolge (Fubini) gilt

$$\begin{aligned}
\int_E \frac{e^z}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\,d\mu &= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{\sqrt{4-r^2}} \frac{e^z r}{\sqrt{4-r^2}}\,dz\,dr\,d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left[\frac{e^z r}{\sqrt{4-r^2}}\right]_{z=0}^{z=\sqrt{4-r^2}} dr\,d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{4-r^2}}r - r}{\sqrt{4-r^2}}\,dr\,d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \left[-e^{\sqrt{4-r^2}} + \sqrt{4-r^2}\right]_0^1 d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \left(-e^{\sqrt{3}} + \sqrt{3} + e^2 - 2\right) d\varphi \\
&= 2\pi\left(e^2 + \sqrt{3} - e^{\sqrt{3}} - 2\right).
\end{aligned}$$

Aufgabe 4 ((2+4+4) Punkte)

a) Zeigen Sie, dass die Gleichung $2z^5 + \sin(xy) + x^3 - y^2 + xz = 2$ in einer Umgebung von $(0,0,1)$ nach z aufgelöst werden kann. Berechnen Sie für die dadurch implizit definierte Funktion $g(x,y)$ die Ableitung $Dg(0,0)$.

b) Sei $f : \mathbb{R} \times (0,1) \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = (\arcsin y)^x$. Berechnen Sie das Taylorpolynom zweiter Ordnung von f im Punkt $p = (2, \frac{1}{2})$. *Hinweis:* Es gilt $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$.

c) Berechnen Sie die Laurent-Reihe der Funktion $\frac{z^2-1}{z^2+1}$ für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-1| > 2$.

Lösung:

a) Es gilt $D_z f(x,y,z) = 10z^4 + x$, also $D_z f(0,0,1) = 10$. Da $f(0,0,1) = 2$ und da $D_z f(0,0,1)$ invertierbar ist, folgt aus dem Satz über implizite Funktionen, dass die Gleichung $2z^5 + \sin(xy) + x^3 - y^2 + xz = 2$ in einer Umgebung von $(0,0,1)$ nach z aufgelöst werden kann.

Es gilt $Dg(0,0) = -(D_z f(0,0,1))^{-1} D_{(x,y)} f(0,0,1)$. Wir berechnen $D_{(x,y)} f(x,y,z) = (y\cos(xy) + 3x^2 + z \quad x\cos(xy) - 2y)$, also $D_{(x,y)} f(0,0,1) = (1 \quad 0)$. Es folgt $Dg(0,0) = (-\frac{1}{10} \quad 0)$.

b) Es gilt $f(x,y) = \exp(x \log(\arcsin y))$ und damit

$$\begin{aligned}
\partial_1 f(x,y) &= \log(\arcsin y) \cdot (\arcsin y)^x, \\
\partial_2 f(x,y) &= \frac{x}{\sqrt{1-y^2}} (\arcsin y)^{x-1}, \\
\partial_{12} f(x,y) &= \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} (\arcsin y)^{x-1} (1 + x \log(\arcsin y)), \\
\partial_1^2 f(x,y) &= (\log(\arcsin y))^2 \cdot (\arcsin y)^x \\
\partial_2^2 f(x,y) &= \frac{xy}{(1-y^2)^{3/2}} (\arcsin y)^{x-1} + \frac{x(x-1)}{1-y^2} (\arcsin y)^{x-2}.
\end{aligned}$$

Für $p = (2, \frac{1}{2})$ folgt $f(p) = \frac{\pi^2}{36}$, $\partial_1 f(p) = \log\left(\frac{\pi}{6}\right) \frac{\pi^2}{36}$, $\partial_2 f(p) = \frac{2}{3\sqrt{3}}\pi$, $\partial_{12} f(p) = \frac{1+2\log\left(\frac{\pi}{6}\right)}{3\sqrt{3}}\pi$, $\partial_1^2 f(p) = \left(\log\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^2 \frac{\pi^2}{36}$, $\partial_2^2 f(p) = \frac{4}{9\sqrt{3}}\pi + \frac{8}{3}$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
P_2(x,y) &= \sum_{|\alpha| \leqslant 2} \frac{D^\alpha f(p)}{\alpha!} ((x,y) - p)^\alpha \\
&= \left(\log\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^2 \frac{\pi^2}{72} (x-2)^2 + \left(\frac{2}{9\sqrt{3}}\pi + \frac{4}{3}\right) \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1 + 2\log\left(\frac{\pi}{6}\right)}{2\sqrt{3}} \pi (x-2) \left(y - \frac{1}{2}\right) \\
&\quad + \log\left(\frac{\pi}{6}\right) \frac{\pi^2}{36} (x-2) + \frac{2}{3\sqrt{3}} \pi \left(y - \frac{1}{2}\right) + \frac{\pi^2}{36}.
\end{aligned}$$

c) Wir setzen $w := z - 1$, also $z = w + 1$. Es folgt

$$\frac{z^2-1}{z^2+1} = w \frac{w+2}{w^2+2w+2}.$$

Die Gleichung $w^2 + 2w + 2 = 0$ hat die Lösungen $-1+i$ und $-1-i$. Wir führen eine Partialbruchzerlegung durch wie folgt:

$$\frac{w+2}{w^2+2w+2} = \frac{A}{w-(-1+i)} + \frac{B}{w-(-1-i)} = \frac{(A+B)w + (1+i)A + (1-i)B}{w^2+2w+2}.$$

Koeffizientenvergleich liefert $A = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$, $B = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$. Wegen $|w| = |z-1| > 2$ gilt $\left|\frac{-1+i}{w}\right| < 1$ und $\left|\frac{-1-i}{w}\right| < 1$. Mit einer Entwicklung in geometrische Reihen (in der zweiten Zeile) folgt

$$\begin{aligned}
\frac{z^2-1}{z^2+1} &= w \left(\frac{1}{w} \cdot \frac{\frac{1}{2} - \frac{i}{2}}{1 - \frac{-1+i}{w}} + \frac{1}{w} \cdot \frac{\frac{1}{2} + \frac{i}{2}}{1 - \frac{-1-i}{w}} \right) \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1+i}{w}\right)^n + \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1-i}{w}\right)^n \\
&= 1 + \sum_{n=-1}^{-\infty} \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right) (-1+i)^{-n} + \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right) (-1-i)^{-n} \right] (z-1)^n.
\end{aligned}$$