Karlsruhe Institute of Technology

Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann

WS 2017/18
9. März 2018

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Modulprüfung – Lösungsvorschläge

Aufgabe 1 (4+3+3=10 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix}$ nicht diagonalisierbar ist.

(b) Sei $M \in \mathbb{R}^{d\times d}$, $d \in \mathbb{N}$, eine Matrix mit nicht-trivialem Kern, d.h. $\ker M \neq \{0\}$. Zeigen Sie, dass die Matrix $M^T M$ positiv semidefinit, aber nicht positiv definit ist.

(c) Sei $B = B^T \in \mathbb{R}^{d\times d}$, $d \in \mathbb{N}$, eine symmetrische Matrix mit Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$. Zeigen Sie die Identität

$$\sum_{i=1}^{d} b_{ii} = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i.$$

Hinweis: Ähnliche Matrizen haben dieselbe Spur.

Lösungsvorschläge:

(a) Da die Matrix A obere Dreiecksgestalt hat, stehen die Eigenwerte schon auf der Diagonalen. Dies sieht man auch direkt aus

$$\det(A - \lambda I) = (1-\lambda)^2(-\mathrm{i}-\lambda)(\mathrm{i}-\lambda).$$

A besitzt also den Eigenwert $\lambda_1 = 1$ der algebraischen Vielfachheit $\alpha_1 = 2$, sowie die einfachen Eigenwerte $\lambda_{2,3} = \pm\mathrm{i}$ mit $\alpha_{2,3} = 1$.

Eine Matrix ist genau dann diagonalisierbar, wenn die algebraische Vielfachheit jedes Eigenwerts gleich der geometrischen Vielfachheit $\gamma_i = \dim\ker(A - \lambda_i I)$ ist, also $\alpha_i = \gamma_i$ für alle Eigenwerte λ_i.

Da für die geometrische Vielfachheit γ_i eines Eigenwerts λ_i immer die Abschätzung $1 \le \gamma_i \le \alpha_i$ gilt, genügt es im vorliegenden Fall also, die geometrische Vielfachheit des doppelten Eigenwerts $\lambda_1 = 1$ zu bestimmen.

Dazu berechnet man

$$\ker(A - I) = \ker\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\mathrm{i}-1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{i}-1 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\},$$

und damit $\gamma_1 = \dim\ker(A - I) = 1 < 2 = \alpha_1$. Somit ist die Matrix A nicht diagonalisierbar.

(b) Sei $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Dann gilt

$$\langle x, M^T M x \rangle = \langle M x, M x \rangle = \|M x\|^2 \geq 0,$$

also ist die Matrix $M^T M$ positiv semidefinit. Wegen $\ker M \neq 0$ gibt es einen Vektor $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $x_0 \neq 0$, mit $M x_0 = 0$. Daher kann die Matrix $M^T M$ nicht positiv definit sein, denn $\langle x_0, M^T M x_0 \rangle = 0$.

(c) Da B symmetrisch ist, gibt es eine orthogonale Matrix U, d.h. $U^{-1} = U^T$, welche B diagonalisiert, also

$$B = U D U^T, \quad D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_d),$$

mit den Eigenwerten λ_i, $i = 1, \dots, d$ von B.

Identifiziert man die linke Seite der zu zeigenden Gleichheit als Spur(B), so gilt wegen der Invarianz der Spur unter Ähnlichkeitstransformationen

$$\sum_{i=1}^{d} b_{ii} = \operatorname{Spur}(B) = \operatorname{Spur}(U D U^T) = \operatorname{Spur} D = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i.$$

Aufgabe 2 (5+5=10 Punkte)

(a) Betrachten Sie das Vektorfeld $A : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\} \to \mathbb{R}^3$,

$$A(x,y,z) := \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_\gamma A(x,y,z)\cdot \mathrm{d}(x,y,z)$ von A entlang der Kurve γ, die eine positiv orientierte Einheitskreislinie in der Ebene $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z = 4\}$ mit Mittelpunkt $(1,1,2)$ beschreibt.

(ii) Sei $C_{r,z}$ die positiv orientierte Kreislinie mit Radius $r > 0$ um die z-Achse auf der Höhe $z \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $\int_{C_{r,z}} A(x,y,z)\cdot \mathrm{d}(x,y,z) = 2\pi$ und erklären Sie, wieso dies keinen Widerspruch zum Satz von Stokes darstellt.

(iii) Ist A ein Potentialfeld auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\}$? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Es sei $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x,y > 0, x+y < 1\}$ das offene Standardsimplex im $\mathbb{R}^2$ und Φ der $\mathscr{C}^1$-Diffeomorphismus

$$\Phi : (0,\infty)^2 \to \Phi((0,\infty)^2), \quad (x,y) \mapsto \Phi(x,y) := \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} x+y \\ y-x \end{pmatrix}.$$

Fertigen Sie eine möglichst detaillierte Zeichnung von S und $\widetilde{S} = \Phi(S)$ an und berechnen Sie das Integral

$$\int_S \mathrm{e}^{-\frac{(x+y)^2}{2}}\,\mathrm{d}(x,y).$$

LÖSUNGSVORSCHLÄGE:

(a) Sei D die Menge $D = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\}$. Auf D gilt

$$\operatorname{rot} A(x,y,z) = \begin{pmatrix} \partial_y A_z - \partial_z A_y \\ \partial_z A_x - \partial_x A_z \\ \partial_x A_y - \partial_y A_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \partial_x\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) - \partial_y\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix} = 0.$$

(i) Die $\mathscr{C}^1$-Kurve γ ist einfach und geschlossen und liegt ganz innerhalb des einfach zusammenhängenden Gebiets $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x,y,z > 0\}$. Das Vektorfeld A ist ein $\mathscr{C}^1$-Vektorfeld auf G. Damit gilt nach dem Satz von Stokes

$$\int_\gamma A(x,y,z)\cdot \mathrm{d}(x,y,z) = \int_{K_\gamma} \operatorname{rot} A(x,y,z)\cdot n(x,y,z)\,\mathrm{d}S = 0,$$

wobei K_γ die von γ berandete Kreisscheibe bezeichnet.

ALTERNATIV: A ist rotationsfrei auf dem einfach zusammenhängenden Gebiet G. Damit existiert ein Potential $\Psi : G \to \mathbb{R}$ mit $A = \nabla\Psi$. Da die Kurve γ geschlossen ist, folgt $\int_\gamma A\cdot \mathrm{d}(x,y,z) = 0$, vergleiche auch die Rechnung in (iii).

(ii) Die Kreislinie $C_{r,z}$ wird parametrisiert durch $c_{r,z} : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$,

$$c_{r,z}(t) = \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ z \end{pmatrix}, \quad t \in [0,2\pi],$$

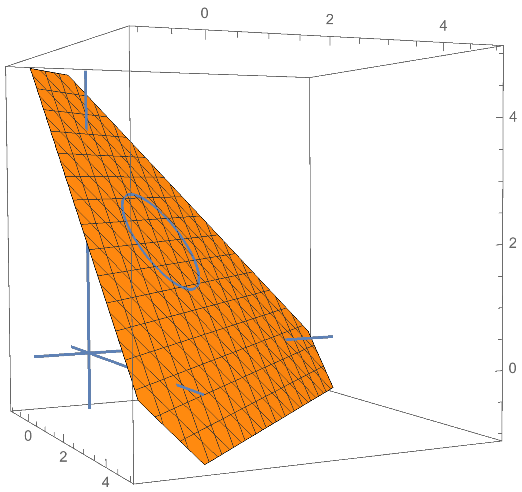


Abbildung 1: Die Kreislinie von Aufgabe 2(a)(i).

mit $c'_{r,z}(t) = \begin{pmatrix} -r\sin t \\ r\cos t \\ 0 \end{pmatrix}$. Damit berechnet man

$$\begin{aligned}\int_{C_{r,z}} A(x,y,z)\cdot \mathrm{d}(x,y,z) &= \int_0^{2\pi} A(c_{r,z}(t))\cdot c'_{r,z}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^2}\begin{pmatrix} -r\sin t \\ r\cos t \\ 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -r\sin t \\ r\cos t \\ 0 \end{pmatrix}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^2} r^2(\sin^2 t + \cos^2 t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t = 2\pi.\end{aligned}$$

Dies stellt keinen Widerspruch zum Satz von Stokes dar, denn das Vektorfeld A hat eine Singularität in der von $C_{r,z}$ berandeten Fläche (die Kreisscheibe $K_{r,z} = \{(x,y,\zeta) \in \mathbb{R}^3 : \zeta = z, x^1 + y^2 \leq r^2\}$), insbesondere ist $A \notin \mathscr{C}^1(V)$, wobei V eine offene Umgebung von $K_{r,z} \subset \mathbb{R}^3$ ist. Der Satz von Stokes ist daher nicht anwendbar!

(iii) A kann auf D kein Potentialfeld sein, denn gäbe es ein $\Phi : D \to \mathbb{R}$ mit $A = \nabla\Phi$ auf D, so müsste für jede geschlossene Kurve $\gamma : [0,1] \to D$ in D gelten

$$\begin{aligned}\int_\gamma A\cdot \mathrm{d}(x,y,z) &= \int_0^1 A(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (\nabla\Phi)(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(\gamma(t))\,\mathrm{d}t \\ &= \Phi(\gamma(1)) - \Phi(\gamma(0)) = 0,\end{aligned}$$

im Widerspruch zu Teilaufgabe (ii).

(b) Bei der Abbildung Φ handelt es sich um eine Drehung um $\frac{\pi}{4}$ in mathematisch negativem Sinn. Dies sieht man zum Beispiel aus der Darstellung

$$\Phi(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) & -\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \\ \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =: R\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Damit handelt es sich bei $\widetilde{S}$ um ein um 45° im Uhrzeigersinn gedrehtes Simplex, wie dargestellt in Abbildung 2. Da es sich um eine Rotation handelt, insbesondere eine lineare Transformation, gilt

$$D\Phi(x,y) = R, \quad \det D\Phi(x,y) = 1.$$

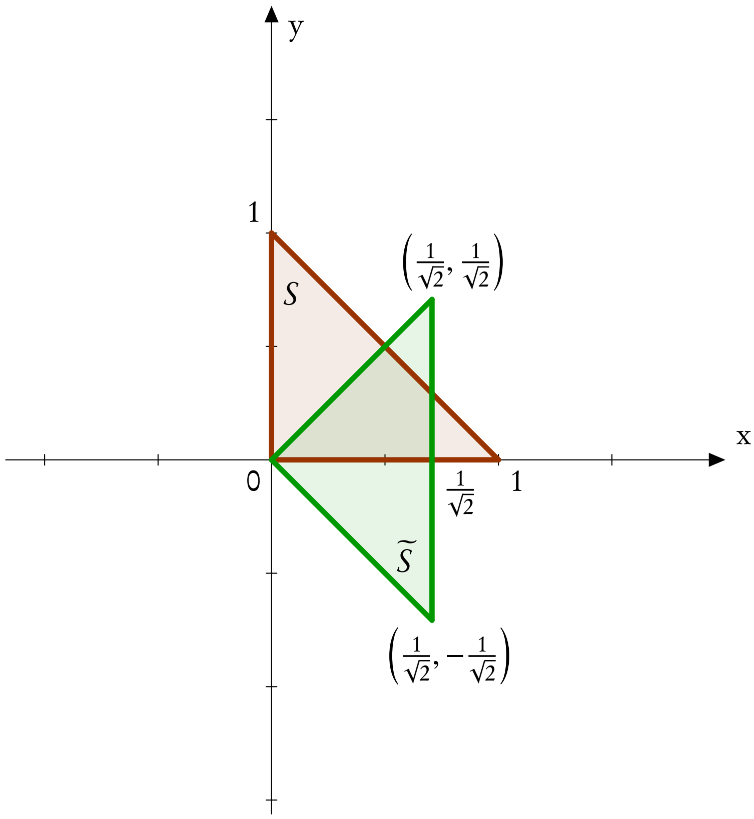


Abbildung 2: Die Mengen S und $\widetilde{S}$ aus Aufgabe 2(b).

Mit dem Transformationssatz folgt dann

$$\begin{aligned}
\int_S e^{-\frac{(x+y)^2}{2}} \,\mathrm{d}(x,y) &= \int_{\Phi^{-1}(\widetilde{S})} e^{-\Phi_1(x,y)^2} \,\mathrm{d}(x,y) = \int_{\widetilde{S}} e^{-u^2} \left|\det D\Phi^{-1}(u,v)\right| \,\mathrm{d}(u,v) \\
&= \int_{\widetilde{S}} e^{-u^2} \left|\det D\Phi(\Phi^{-1}(u,v))\right|^{-1} \,\mathrm{d}(u,v) = \int_{\widetilde{S}} e^{-u^2} \,\mathrm{d}(u,v) \\
&= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_{-u}^{u} e^{-u^2} \,\mathrm{d}v \,\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} 2u e^{-u^2} \,\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-t} \,\mathrm{d}t = 1 - e^{-\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 3 (5+5=10 Punkte)

(a) Sei $d \in \mathbb{N}$ und $A = A^T \in \mathbb{R}^{d\times d}$ eine symmetrische Matrix.

  (i) Zeigen Sie, dass der Gradient der quadratischen Form $Q_A : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$,

$$Q_A(x) = \langle x, Ax\rangle, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

  gegeben ist durch $\nabla Q_A(x) = 2Ax$.

  (ii) Zeigen Sie mithilfe der Lagrange-Multiplikator-Methode, dass das Maximum der quadratischen Form Q_A auf der Sphäre $\mathbb{S}^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\|^2 = 1\}$ durch den größten Eigenwert gegeben ist. Charakterisieren Sie die Punkte $x \in \mathbb{S}^{d-1}$, an denen das Maximum angenommen wird.

(b) Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$g(x,y) = x^2 e^y - y^2 e^{x^2} = 0$$

in einer Umgebung des Punktes $(1,1)$ nach y aufgelöst werden kann. Die so implizit definierte Funktion werde mit f bezeichnet, $y = f(x)$. Berechnen Sie das Taylorpolynom zweiter Ordnung von f um $x = 1$.
Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass f in einer Umgebung von $x = 1$ beliebig oft differenzierbar ist.

Lösungsvorschläge:

(a) (i) Sei $A = (a_{ij})_{i,j=1}^d$. Dann ist $Q_A(x) = \sum_{i,j=1}^d a_{ij}x_ix_j$ und für $k = 1,\dots,d$ gilt

$$\begin{aligned}\partial_k Q_A(x) &= \sum_{i,j=1}^d a_{ij}\partial_k(x_ix_j) = \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x_j\partial_k x_i + x_i\partial_k x_j) = \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x_j\delta_{ki} + x_i\delta_k j)\\ &= \sum_{j=1}^d a_{kj}x_j + \sum_{i=1}^d a_{ik}x_i = (Ax)_k + (A^Tx)_k = 2(Ax)_k,\end{aligned}$$

wobei $\delta_{kj} = 1$ falls $k = j$ und $\delta_{kj} = 0$ falls $k \neq j$ das Kronecker-Symbol bezeichnet und $A = A^T$ verwendet wurde. Damit hat man $\nabla Q_A(x) = 2Ax$.

(ii) Zunächst bemerken wir, dass die Menge $\mathbb{S}^{d-1}$ abgeschlossen und beschränkt, also kompakt, in $\mathbb{R}^d$ ist. Da die Funktion Q_A stetig ist, besitzt sie ein Maximum und Minimum auf der Menge $\mathbb{S}^{d-1}$. Um dies zu bestimmen, führen wir die Lagrange'sche Hilfsfunktion

$$L_A(x,\lambda) := Q_A(x) - \lambda(\|x\|^2 - 1) = \langle x, (A-\lambda I)x\rangle + \lambda, \quad x \in \mathbb{R}^d, \lambda \in \mathbb{R},$$

mit Lagrangeparameter λ ein. Extrema von Q_A auf $\mathbb{S}^{d-1}$ sind dann kritische Punkte der Funktion L_A,

$$\nabla L_A(x,\lambda) = 0, \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} 2(A-\lambda I)x &= 0\\ \|x\|^2 - 1 &= 0\end{aligned}$$

Diese Gleichungen besagen, dass für Extrema von Q_A auf $\mathbb{S}^{d-1}$ die Beziehung $Ax = \lambda x$ gelten muss, für Vektoren mit $\|x\|^2 = 1$. Insbesondere sind die Extrempunkte also unter der Menge der *normierten* Eigenvektoren $\{x_\lambda\}_{\lambda \text{ Eigenwert von } A}$ zu suchen, und es gilt

$$\begin{aligned}\max_{x\in\mathbb{S}^{d-1}} Q_A(x) &= \max_{\substack{\{x_\lambda\}_{\lambda \text{Eigenwert von } A},\\ \|x_\lambda\|=1}} \langle x_\lambda, Ax_\lambda\rangle = \max_{\substack{\{x_\lambda\}_{\lambda \text{Eigenwert von } A},\\ \|x_\lambda\|=1}} \langle x_\lambda, \lambda x_\lambda\rangle \\ &= \max_{\substack{\{x_\lambda\}_{\lambda \text{Eigenwert von } A},\\ \|x_\lambda\|=1}} \lambda\|x_\lambda\|^2 = \max_{\lambda \text{Eigenwert von } A} \lambda =: \lambda_{\max}.\end{aligned}$$

Das Maximum wird angenommen am Punkt (an den Punkten) $x_{\lambda_{\max}} \in \mathbb{S}^{d-1}$, dem (den) normierten Eigenvektor(en) zu $\lambda_{\max}$.

(b) Zunächst sieht man wegen $g(1,1) = 0$, dass der Punkt $(1,1)$ tatsächlich auf der Kurve $g = 0$ liegt. Es gilt

$$\nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} 2xe^y - 2xy^2e^{x^2} \\ x^2e^y - 2ye^{x^2}\end{pmatrix},$$

und damit $\partial_y g(1,1) = 1 - 2 = -1 \neq 0$. Aus dem Satz über implizit definierte Funktionen folgt, dass es eine Umgebung des Punktes $(1,1)$ gibt, in der die Gleichung $g(x,y) = 0$ eindeutig nach y auflösbar ist. Genauer existieren eine offene Umgebung U von $x = 1$ und eine offene Umgebung V von $y = 1$, sowie eine stetig differenzierbare Funktion $f : U \to V$ sodass für alle $x \in U$ und $y \in V$ gilt $\partial_y g(x,y) \neq 0$ und

$$g(x,y) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad y = f(x).$$

Da g beliebig oft stetig differenzierbar ist, ist auch f beliebig oft stetig differenzierbar auf U. Für alle $x \in U$ gilt

$$f'(x) = -\frac{\partial_x g(x,f(x))}{\partial_y g(x,f(x))}, \tag{1}$$

insbesondere $f'(1) = -\frac{\partial_x g(1,1)}{\partial_y g(1,1)} = 0$.

Für das Taylorpolynom 2. Ordnung von f in $x = 1$ benötigen wir noch die zweite Ableitung von f. Diese erhalten wir aus (1) mithilfe der Kettenregel:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\frac{\partial_x g(x,f(x))}{\partial_y g(x,f(x))}\right) \\ &= -\frac{\partial_y g(x,f(x))\left[\partial_x^2 g(x,f(x)) + \partial_y\partial_x g(x,f(x))f'(x)\right]}{(\partial_y g(x,f(x)))^2} \\ &\quad + \frac{\partial_x g(x,f(x))\left[\partial_x\partial_y g(x,f(x)) + \partial_y^2 g(x,f(x))f'(x)\right]}{(\partial_y g(x,f(x)))^2}.\end{aligned}$$

Mit $f'(1) = 0$ haben wir also

$$f''(1) = -\frac{\partial_y g(1,1)\partial_x^2 g(1,1)}{(\partial_y g(1,1))^2} = \frac{-1(-4)}{(-1)^2} = 4,$$

wobei $\partial_x^2 g(1,1) = \left(2e^y - 2y^2e^{x^2}(1+2x^2)\right)\Big|_{(x,y)=(1,1)} = -4$ verwendet wurde. Damit ist das Taylorpolynom 2. Ordnung von f an der Stelle $x = 1$ gegeben durch

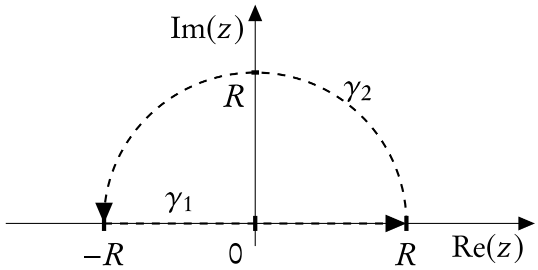
$$T_2(f)(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2}f''(1)(x-1)^2 = 1 + 2(x-1)^2, \quad x \in U.$$

Aufgabe 4 (4+6=10 Punkte)

(a) Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten der Funktion $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto f(t) = |t|$, und zeigen Sie damit, dass

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

(b) Sei $S = \{-\mathrm{i}, \mathrm{i}\}$ und $f : \mathbb{C} \setminus S \to \mathbb{C}$ gegeben durch $f(z) = \frac{e^{\mathrm{i}z}}{1+z^2}$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus S$. Die regulären Kurven γ_1, γ_2 seien wie in der Skizze mit $R > 1$.



(i) Berechnen Sie $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ für $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$.

(ii) Zeigen Sie: $|f(z)| \leq \frac{1}{R^2-1}$ für $z \in \mathrm{Bild}(\gamma_2)$.

(iii) Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto g(x) := \frac{1}{1+x^2}$. Berechnen Sie $\widehat{g}(-1)$, d.h. die Fouriertransformierte von g an der Stelle -1.

LÖSUNGSVORSCHLÄGE:

(a) Die Fourierkoeffizienten von f sind gegeben durch $\widehat{f_k} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t$, $k \in \mathbb{Z}$. Es folgt $\widehat{f_0} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|t|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi t\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$ und für $k \neq 0$ erhält man mithilfe partieller Integration

$$\begin{aligned}
\widehat{f_k} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|t|\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi t\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi t\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi t\cos(kt)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{t}{k}\sin(kt)\right]_0^\pi - \frac{1}{k}\int_0^\pi \sin(kt)\,\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{t}{k}\sin(kt)\right]_0^\pi - \left[\frac{1}{k^2}\cos(kt)\right]_0^\pi\right) \\
&= \frac{1}{\pi k^2}\left(\cos(k\pi) - 1\right) = \frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2} = \begin{cases} 0, & k \in 2\mathbb{Z} \setminus \{0\} \\ -\frac{2}{\pi k^2}, & k \in 2\mathbb{Z}+1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Da die Fourierkoeffizienten wie $\frac{1}{k^2}$ abfallen, konvergiert die Fourierreihe absolut und gleichmäßig auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$, und da $f \in \mathscr{C}_{\mathrm{per}}([-\pi, \pi])$ ist, gilt

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f_k}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}$$

für alle $t \in [-\pi, \pi]$. Insbesondere erhält man für $t = 0$:

$$0 = f(0) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f_k} = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{k \in 2\mathbb{Z}+1} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2},$$

und damit

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

(b) (i) Die Kurve γ ist einfach geschlossen und positiv orientiert, mit $z = \mathrm{i}$ innerhalb von γ. Die Funktion f ist holomorph auf der Menge $\mathbb{C} \setminus S$. Damit gilt nach dem Residuensatz

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{res}(f, \mathrm{i}).$$

Da $z = \mathrm{i}$ eine isolierte Singularität 1. Ordnung von f ist, kann man das Residuum aus

$$\operatorname{res}(f,\mathrm{i}) = \lim_{z\to\mathrm{i}}(z-\mathrm{i}f(z) = \lim_{z\to\mathrm{i}}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z+\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{e}^{-1}}{2\mathrm{i}} = \frac{1}{2\mathrm{ie}}$$

berechnen. Es folgt

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \frac{\pi}{\mathrm{e}}.$$

(ii) Sei $z \in \operatorname{Bild}(\gamma_2)$. Dann ist z von der Form $z = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ mit $R > 1$ und $t \in [0,\pi]$. Es folgt

$$|f(z)| = \left|\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}}{1+R^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}}\right| = \frac{\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}R(\cos t+\mathrm{i}\sin t)}\right|}{\left|1+R^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}\right|} = \frac{\mathrm{e}^{-R\sin t}}{\left|1+R^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}\right|}.$$

Da $t \in [0,\pi]$, ist $\sin t \in [0,1]$, und damit der Zähler $\mathrm{e}^{-R\sin t} \le 1$. Weiter gilt für den Nenner

$$\begin{aligned}\left|1+R^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}\right|^2 &= \left|1+R^2\cos(2t)+\mathrm{i}R^2\sin(2t)\right|^2 = (1+R^2\cos(2t))^2 + R^4\sin^2(2t)\\ &= 1+R^4+2R^2\cos(2t) \ge 1+R^4-2R^2 = (1-R^2)^2.\end{aligned}$$

Insgesamt haben wir also die Abschätzung

$$|f(z)| \le \frac{1}{R^2-1}$$

für alle $z \in \operatorname{Bild}(\gamma_2)$.

(iii) Es ist

$$\widehat{g}(-1) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(-1)x} g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Aus Aufgabenteil (i) wissen wir, dass

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z = \frac{\pi}{\mathrm{e}},$$

also

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \frac{\pi}{\mathrm{e}} - \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Wegen Aufgabenteil (ii) gilt nun aber

$$\left|\int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le \text{Länge}(\gamma_2) \sup_{z\in\operatorname{Spur}(\gamma_2)} |f(z)| \le \frac{\pi R}{R^2-1} \to 0 \quad \text{für } R\to\infty.$$

Damit erhalten wir

$$\widehat{g}(-1) = \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \frac{\pi}{\mathrm{e}} - \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z = \frac{\pi}{\mathrm{e}}.$$