

# Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik Sommersemester 2017

Peer Christian Kunstmann  
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)  
Institut für Analysis  
Englerstr. 2, 76131 Karlsruhe  
e-mail: peer.kunstmann@kit.edu

Dies ist eine Vorlesungszusammenfassung, gedacht zur Vorlesungsbegleitung und als Gedächtnisstütze, nicht jedoch als etwas, das für sich selbst stehen könnte (wie etwa ein Lehrbuch). Der Besuch der Vorlesung ist durch die Lektüre in keinem Fall zu ersetzen, es gibt dort noch viel mehr an mündlichen Erklärungen, Erläuterungen und veranschaulichenden Skizzen, die für Verständnis und Einordnung des präsentierten Stoffes unabdingbar sind.

## 16 Skalarprodukt und Orthogonalität

**16.1. Skalarprodukte:** Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum. Eine Abbildung  $(\cdot|\cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$  mit den Eigenschaften

$$(S1) \quad \forall x, y \in V: (x|y) = \overline{(y|x)},$$

$$(S2) \quad \forall x, y, z \in V, \alpha \in \mathbb{K}: (\alpha x + y|z) = \alpha(x|z) + (y|z),$$

$$(S3) \quad \forall x \in V \setminus \{0\}: (x|x) > 0.$$

heißt ein *Skalarprodukt auf  $V$* .

**Eigenschaften** eines Skalarproduktes auf einem  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $V$  sind

$$\forall x, y \in V, \alpha \in \mathbb{K}: (x|\alpha y + z) = \overline{\alpha}(x|y) + (x|z),$$

$$\forall x \in V: (x|0) = (0|x) = 0,$$

$$\forall x, y \in V: |(x|y)| \leq \sqrt{(x|x)}\sqrt{(y|y)} \text{ (Cauchy-Schwarz-Ungleichung)}.$$

Zum Beweis der Cauchy-Schwarz-Ungleichung für  $y \neq 0$  schreibe man

$$0 \leq (x - \alpha y|x - \alpha y) = (x|x) - \alpha(y|x) - \overline{\alpha}(x|y) + |\alpha|^2(y|y) = (x|x) - \frac{|(x|y)|^2}{(y|y)},$$

wobei  $\alpha = (x|y)/(y|y)$ . Wegen (S3) gilt Gleichheit in der Cauchy-Schwarz-Ungleichung nur, wenn  $x = \alpha y$ , dh also nur dann, wenn  $x, y$  linear abhängig sind.

**Bemerkung:** Ist  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  und also  $V$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum, so kann auf die komplexe Konjugation verzichtet werden, da  $\bar{r} = r$  für alle  $r \in \mathbb{R}$ .

**Beispiele:** (1) Das *gewöhnliche Skalarprodukt* auf dem  $\mathbb{K}^n$  (für  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  heißt es auch *euklidisch*) ist gegeben durch

$$(\vec{x}|\vec{y}) := \sum_{j=1}^n x_j \overline{y_j} \quad \text{für } \vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n.$$

Für das Skalarprodukt von  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$  schreibt man häufig auch  $\vec{x} \cdot \vec{y}$  (und gelegentlich sogar nur  $\vec{x}\vec{y}$ ).

(2) Sind  $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ , so definiert auch

$$(\vec{x}|\vec{y}) := \sum_{j=1}^n a_j x_j \overline{y_j} \quad \text{für } \vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$$

ein Skalarprodukt auf  $\mathbb{K}^n$ : (S1) und (S2) sind leicht, für (S3) beachte man, dass

$$(\vec{x}|\vec{x}) = \sum_{j=1}^n a_j |x_j|^2 \geq 0$$

wegen  $a_j > 0$  nur dann  $= 0$  ist, wenn alle  $x_j = 0$  sind.

(2') Sei  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  invertierbar und  $(\cdot|\cdot)$  das Standardskalarprodukt. Dann definiert

$$((\vec{x}|\vec{y})) := (A\vec{x}|A\vec{y})$$

ein Skalarprodukt auf  $\mathbb{K}^n$ . Auch hier sind (S1) und (S2) leicht. Für (S3) benötigt man die Invertierbarkeit von  $A$ .

(3) Durch Grenzübergang von (1) erhält man: Sei  $l^2(\mathbb{N})$  der Raum der quadratsummierbaren Folgen in  $\mathbb{K}$ , also

$$l^2(\mathbb{N}) = \{x = (x_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 < \infty\}.$$

Dann ist  $l^2(\mathbb{N})$  ein Untervektorraum von  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  und durch

$$(x|y) := \sum_{j=1}^{\infty} x_j \overline{y_j}, \quad x, y \in l^2(\mathbb{N}),$$

wird ein Skalarprodukt auf  $l^2(\mathbb{N})$  definiert. Dabei ist die Reihe im Skalarprodukt absolut konvergent: Zunächst gilt für jedes  $N \in \mathbb{N}$  nach Cauchy-Schwarz:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N |x_j \overline{y_j}| &= \sum_{j=1}^N |x_j| |y_j| \leq \left( \sum_{j=1}^N |x_j|^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{j=1}^N |y_j|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \left( \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^2 \right)^{1/2} =: M < \infty, \end{aligned}$$

und  $N \rightarrow \infty$  impliziert absolute Konvergenz. Weiter haben wir für  $x, y \in l^2(\mathbb{N})$ :

$$\sum_{j=1}^N |x_j + y_j|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 + \sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^2 + \underbrace{\sum_{j=1}^N (x_j \overline{y_j} + \overline{x_j} y_j)}_{\leq 2M},$$

was für  $N \rightarrow \infty$  impliziert, dass  $x + y \in l^2(\mathbb{N})$  gilt. Nun sind die Eigenschaften leicht nachzuweisen.

Entsprechendes gilt, wenn man statt  $\mathbb{N}$  als Indexmenge  $\mathbb{Z}$  nimmt und

$$l^2(\mathbb{Z}) := \{x = (x_j)_{j \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{Z}} : \sum_{j=-\infty}^{\infty} |x_j|^2 < \infty\}$$

betrachtet.

Ende Do  
09.02.17  
W16/17

**16.2. Normen:** Ist  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und  $(\cdot|\cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$  ein Skalarprodukt, so hat die Abbildung  $\|\cdot\| : V \rightarrow [0, \infty)$ ,  $v \mapsto \sqrt{(v|v)}$  folgende Eigenschaften:

$$(N1) \quad \forall v \in V: \|v\| = 0 \Rightarrow v = 0,$$

$$(N2) \quad \forall v \in V, \alpha \in \mathbb{K}: \|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|,$$

$$(N3) \quad \forall u, v \in V: \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \text{ (Dreiecksungleichung).}$$

*Beweis der Dreiecksungleichung.* Es gilt (unter Verwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung):

$$\|u + v\|^2 = (u + v|u + v) = \|u\|^2 + 2\operatorname{Re}(u|v) + \|v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2|(u|v)| + \|v\|^2 \leq (\|u\| + \|v\|)^2,$$

und die Ungleichung folgt durch Wurzelziehen.  $\square$

**Definition:** Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum. Eine Abbildung  $\|\cdot\| : V \rightarrow [0, \infty)$  mit den Eigenschaften (N1)–(N3) heißt eine *Norm auf  $V$* .

Ist  $\|\cdot\|$  eine Norm auf  $V$ , so wird für  $u, v \in V$  die Zahl  $\|u - v\| \geq 0$  als **Abstand** von  $u$  und  $v$  interpretiert, und es gilt  $\|0\| = 0$ , sowie

$$\left| \|u\| - \|v\| \right| \leq \|u - v\| \quad (\text{umgekehrte Dreiecksungleichung}).$$

**Beispiele:** (1) Ist  $M$  eine Menge mit mindestens zwei Punkten, so wird auf dem  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $B(M)$  aller beschränkten Funktionen  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(m)| : m \in M\}$$

eine Norm definiert. Zu dieser Norm gibt es kein Skalarprodukt.

(2) Durch  $\|(x_1, x_2)\|_1 := |x_1| + |x_2|$  wird auf dem  $\mathbb{R}^2$  eine Norm definiert, zu der es kein Skalarprodukt gibt.

**Bemerkung:** Durch eine Norm hat man also einen *Abstandsbegriff* auf einem Vektorraum. Durch ein Skalarprodukt hat man aber außerdem noch die Möglichkeit, *Winkel* zu betrachten:

Sind z.B.  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ , so ist

$$(\vec{x}|\vec{y}) = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cos \varphi,$$

wobei  $\varphi$  den von  $\vec{x}, \vec{y}$  eingeschlossenen **Winkel** bezeichne. Da das Skalarprodukt in jeder Komponente linear ist, muss man das nur für  $\|\vec{x}\| = \|\vec{y}\| = 1$  einsehen. Am besten geht das für  $n = 2$  und etwa  $\vec{x} = \vec{e}_1, \vec{y} = (y_1, y_2)$ . Dann ist

$$(\vec{x}|\vec{y}) = (\vec{e}_1|\vec{y}) = y_1.$$

**16.3. Orthogonalität:** Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt. Vektoren  $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$  heißen *orthogonal*, falls für alle  $j, k \in \{1, 2, \dots, m\}$  mit  $j \neq k$  gilt  $(v_j|v_k) = 0$ . Statt  $(v|w) = 0$  schreibt man auch  $v \perp w$ .

Die Vektoren  $v_1, v_2, \dots, v_m$  heißen *orthonormal* oder ein *Orthonormalsystem (ONS)*, falls für alle  $j, k$  gilt:  $(v_j|v_k) = \delta_{jk}$ , dh also falls die Vektoren orthogonal sind und zusätzlich alle Norm 1 haben.

Ist  $V$  endlich-dimensional, so ist eine *Orthonormalbasis (ONB)* von  $V$  eine Basis von  $V$ , die ein Orthonormalsystem ist.

**Beispiel:** Die Standardbasis  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$  ist eine Orthonormalbasis von  $\mathbb{K}^n$ , denn es gilt  $(\vec{e}_j|\vec{e}_k) = \delta_{jk}$  für alle  $j, k = 1, \dots, n$ .

**Satz:** Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt und seien  $v_1, v_2, \dots, v_n \in V \setminus \{0\}$  orthogonal. Dann sind  $v_1, v_2, \dots, v_n$  linear unabhängig.

*Beweis.* Seien  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$  mit

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0.$$

Sei nun  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Wir nehmen das Skalarprodukt der Gleichung mit  $v_k$  und erhalten

$$0 = (0|v_k) = (\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n|v_k) = \alpha_k (v_k|v_k)$$

wegen der vorausgesetzten Orthogonalität. Wegen  $v_k \neq 0$  ist auch  $(v_k|v_k) \neq 0$ , und wir erhalten  $\alpha_k = 0$ . Da  $k$  beliebig war, sind  $v_1, v_2, \dots, v_n$  linear unabhängig.  $\square$

**Bemerkung:** Ist  $v_1, v_2, \dots, v_m$  ein Orthonormalsystem in  $V$  und  $v \in \text{lin}\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ , so lassen sich die Koordinaten von  $v$  bzgl.  $v_1, v_2, \dots, v_m$  leicht bestimmen. Es gilt nämlich

$$v = \sum_{j=1}^m (v|v_j) v_j.$$

Zum Beweis schreibt man  $v = \sum_{j=1}^m \alpha_j v_j$  und bildet das Skalarprodukt mit  $v_k$ ,  $k = 1, \dots, m$ :

$$(v|v_k) = \sum_{j=1}^m \alpha_j \underbrace{(v_j|v_k)}_{=\delta_{jk}} = \alpha_k.$$

**16.4. Das Gram-Schmidt-Verfahren:** Gegeben sei ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt und  $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$  seien linear unabhängig. Wir werden ein Orthonormalsystem  $b_1, b_2, \dots, b_m$  konstruieren mit

$$\text{lin}\{v_1, v_2, \dots, v_m\} = \text{lin}\{b_1, b_2, \dots, b_m\}.$$

Falls  $v_1, v_2, \dots, v_m$  eine Basis von  $V$  ist, so ist  $b_1, b_2, \dots, b_m$  eine Orthonormalbasis von  $V$ .

Die Vektoren  $b_1, \dots, b_m$  werden sukzessiv so konstruiert, dass gilt:

$$\text{lin}\{v_1, v_2, \dots, v_k\} = \text{lin}\{b_1, b_2, \dots, b_k\} \quad \text{für alle } k = 1, \dots, m.$$

Wir setzen  $b_1 := v_1/\|v_1\|$  und für  $k = 2, \dots, m$ :

$$c_k := v_k - \sum_{j=1}^{k-1} (v_k | b_j) b_j, \quad b_k := \frac{c_k}{\|c_k\|},$$

oder gleichbedeutend

$$c_1 := v_1, \quad c_k := v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(v_k | c_j)}{(c_j | c_j)} c_j \quad \text{für } k = 2, \dots, m, \quad b_k := \frac{c_k}{\|c_k\|} \quad \text{für } k = 1, \dots, m.$$

Ende M  
24.04.17

**Beispiele:** (1) Wir betrachten  $n = 3$ ,  $V = \mathbb{C}^3$  und

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \vec{b}_1 &= \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \vec{c}_2 &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \vec{b}_2 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \vec{c}_3 &= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \cdot 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \\ 1/2 \end{pmatrix} \\ \vec{b}_3 &= \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(2)  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  wie eben, aber  $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Dann sind  $\vec{b}_1, \vec{b}_2$  wie eben, aber

$$\begin{aligned}\vec{c}_3 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/6 \\ 1/3 \\ -1/6 \end{pmatrix} \\ \vec{b}_3 &= \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Man beachte, dass sich dieses  $\vec{b}_3$  von dem in Beispiel (1) nur durch das Vorzeichen unterscheidet. Dies ist nicht erstaunlich, da es genau zwei Möglichkeiten gibt,  $\vec{b}_1, \vec{b}_2$  zu einer Orthonormalbasis zu ergänzen.

**Folgerung:** Jeder endlichdimensionale Vektorraum  $V$  mit Skalarprodukt besitzt eine Orthonormalbasis.

**16.5. Transponierte und adjungierte Matrizen:** Für eine Matrix  $A = (a_{jk}) \in \mathbb{K}^{m \times n}$  heißt die Matrix  $\in \mathbb{K}^{n \times m}$ , die durch Vertauschen von Zeilen und Spalten entsteht, die *transponierte Matrix* zu  $A$  und wird mit  $A^T$  bezeichnet. Für alle  $k \in \{1, \dots, n\}$ ,  $j \in \{1, \dots, m\}$  steht an der Stelle  $(k, j)$  in der Matrix  $A^T$  also der Eintrag  $a_{jk}$ , der in der Matrix  $A$  an der Stelle  $(j, k)$  steht. Setzen wir  $B := A^T$  mit  $B = (b_{kj})_{k=1, j=1}^n, m \in \mathbb{K}^{n \times m}$ , so gilt also

$$b_{kj} = a_{jk}, \quad k \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\}.$$

Im Falle  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  heißt die Matrix  $\in \mathbb{C}^{n \times m}$ , für die an jeder Stelle  $(k, j)$  der Eintrag  $\overline{a_{jk}}$  steht, die *adjungierte Matrix* zu  $A$  und wird mit  $A^*$  bezeichnet.

**Bemerkung:** Setzt man  $\overline{A} := (\overline{a_{jk}}) \in \mathbb{C}^{m \times n}$  (*konjugiert komplexe Matrix* zu  $A$ ), so gilt also

$$A^* = \overline{A^T} = (\overline{A})^T.$$

**Schreibweisen des Skalarprodukts:**

$$\begin{aligned}\text{Für } \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n \times 1} \text{ gilt } (\vec{x} | \vec{y}) &= \vec{y}^T \vec{x} = \vec{x}^T \vec{y}. \\ \text{Für } \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^n = \mathbb{C}^{n \times 1} \text{ gilt } (\vec{x} | \vec{y}) &= \vec{y}^* \vec{x} = \vec{x}^* \vec{y}.\end{aligned}$$

**Rechenregeln:** Für Matrizen  $A, B$ , deren Produkt erklärt ist, gilt:

$$(AB)^T = B^T A^T \quad \text{und} \quad (AB)^* = B^* A^*.$$

Für eine invertierbare Matrix  $A$  sind auch  $A^T$  und  $A^*$  invertierbar, und es gilt

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T, \quad (A^*)^{-1} = (A^{-1})^*.$$

Wende dazu die Rechenregeln auf  $B = A^{-1}$  an und beachte  $I^T = I = I^*$ , wobei  $I$  die jeweilige Einheitsmatrix sei.

**Folgerung:** Sei  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ . Dann gilt:

- (a) Im Fall  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ist  $(A\vec{x}|\vec{y}) = (\vec{x}|A^T\vec{y})$  für alle  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{y} \in \mathbb{R}^m$ .
- (b) Im Fall  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  ist  $(A\vec{x}|\vec{y}) = (\vec{x}|A^*\vec{y})$  für alle  $\vec{x} \in \mathbb{C}^n, \vec{y} \in \mathbb{C}^m$ .

*Beweis.* Man schreibe das Skalarprodukt wie oben angegeben und benutze die Rechenregeln. □

**16.6. Orthogonale und unitäre Matrizen:** Eine wichtige Rolle spielen Matrizen  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ , deren zugehörige lineare Abbildung  $\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n, \vec{x} \mapsto A\vec{x}$ , das Skalarprodukt invariant lässt, dh für die gilt:

$$(A\vec{x}|A\vec{y}) = (\vec{x}|\vec{y}) \quad \text{für alle } \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{K}^n.$$

Damit verändert  $A$  auch *Winkel* und *Abstände* nicht. Eine solche Matrix  $A$  hat Kern  $A = \{\vec{0}\}$ , ist also invertierbar. Aus den Rechenregeln folgt

$$A^T A = I_n \quad (\text{für } \mathbb{K} = \mathbb{R}), \quad A^* A = I_n \quad (\text{für } \mathbb{K} = \mathbb{C}).$$

Eine Matrix  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  mit dieser Eigenschaft heißt *orthogonal* (für  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ) bzw. *unitär* (für  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ). Somit gilt

$$A^T = A^{-1} \text{ falls } A \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ orthogonal, } A^* = A^{-1} \text{ falls } A \in \mathbb{C}^{n \times n} \text{ unitär.}$$

**Bemerkung:** Sei  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ .

- 1)  $A$  ist genau dann unitär, wenn die Spalten von  $A$  eine Orthonormalbasis von  $\mathbb{C}^n$  bilden.
- 2)  $A$  ist genau dann unitär, wenn für jedes Orthonormalsystem  $v_1, \dots, v_m$  in  $\mathbb{C}^n$  auch  $Av_1, \dots, Av_m$  ein Orthonormalsystem von  $\mathbb{C}^n$  ist.
- 3) Produkte, Inverse, Transponierte und Adjungierte von unitären Matrizen sind unitär.

**Beispiele:** 1) Spiegelungen in  $\mathbb{C}^n$ : etwa  $A\vec{e}_1 = -\vec{e}_1, A\vec{e}_j = \vec{e}_j$  für  $j = 2, \dots, n$ .

2) Rotation in  $\mathbb{R}^2$  um den Winkel  $\theta \in \mathbb{R}$ :  $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ .

3) Im  $\mathbb{R}^3$  Rotation um die  $z$ -Achse bei Spiegelung an der  $(x, y)$ -Ebene:

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$



**16.7. Orthogonalprojektionen:** Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt,  $b_1, b_2, \dots, b_m$  ein Orthonormalsystem in  $V$  und  $U := \text{lin}\{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ . Die lineare Abbildung

$$P : V \rightarrow U, v \mapsto Pv = \sum_{j=1}^m (v|b_j)b_j$$

hat folgende Eigenschaften:

$$P \circ P = P, \quad \text{Bild } P = U, \quad \text{Kern } P = \{v \in V : v \perp u \text{ für alle } u \in U\}.$$

Es gilt  $(v - Pv|u) = 0$  für alle  $u \in U, v \in V$ , und

$$\|v - Pv\| = \min\{\|v - u\| : u \in U\} \quad \text{für jedes } v \in V,$$

dh  $Pv$  ist die (eindeutig bestimmte) *Bestapproximation* von  $v$  in  $U$ . Die Abbildung  $P$  heißt *Orthogonalprojektion* von  $V$  auf  $U$ .

*Beweis.* Klar ist  $\text{Bild } P \subseteq U$ . Nach der Bemerkung in 16.3 gilt  $Pu = u$  für alle  $u \in U$ , also ist  $P \circ P = P$  und  $\text{Bild } P = U$ . Für jedes  $v \in V$  gilt:

$$Pv = 0 \iff (v|b_j) = 0 \text{ für alle } j \iff (v|u) = 0 \text{ für alle } u \in U.$$

Außerdem ist für  $k = 1, \dots, m$ :

$$(v - Pv|b_k) = (v|b_k) - (Pv|b_k) = (v|b_k) - \sum_{j=1}^m (v|b_j) \underbrace{(b_j|b_k)}_{=\delta_{jk}} = (v|b_k) - (v|b_k) = 0,$$

und folglich auch  $(v - Pv|u) = 0$  für alle  $u \in U$ . Schließlich gilt für  $u \in U$ :

$$\begin{aligned} \|v - u\|^2 &= \|v - Pv + Pv - u\|^2 = \|v - Pv\|^2 + \|Pv - u\|^2 + 2\text{Re}(v - Pv|Pv - u) \\ &= \|v - Pv\|^2 + \|Pv - u\|^2. \end{aligned}$$

Hieran sieht man, dass  $Pv$  die eindeutige Bestapproximation von  $v$  in  $U$  ist. □

**Bemerkung:** 1) Im Gram-Schmidt-Verfahren in 16.4 hat man im  $k$ -ten Schritt (für  $k = 2, \dots, m$ ) und für  $U = \text{lin}\{b_1, b_2, \dots, b_{k-1}\}$ , dass  $c_k = v_k - Pv_k$  und somit  $c_k \perp u$  für jedes  $u \in U$  wie gewünscht.

2) Der Satz kann in vielen Situationen angewendet werden, insbesondere auch wenn  $V$  unendlich-dimensional ist. Mittels einer Folge  $U_1 \subseteq U_2 \subseteq \dots$ , wobei immer  $U_m := \text{lin}\{b_1, b_2, \dots, b_m\}$  ist, und zugehörigen Orthogonalprojektionen  $P_m$  von  $V$  auf  $U_m$  kann man hoffen durch die Folge  $(P_m v)_{m \in \mathbb{N}}$  ein gegebenes  $v \in V$  immer besser zu approximieren. Wir kommen darauf später im Rahmen von Fourierreihen zurück.

Ende Di  
25.04.17

### 16.8. Ergänzung: Matrizen Gruppen: Wir beginnen mit einer

**Definition:** Eine *Gruppe* ist eine nicht-leere Menge  $G$ , versehen mit einer Verknüpfung  $\circ : G \times G \rightarrow G$ , geschrieben  $a \circ b$  bzw. meist nur  $ab$ , mit folgenden Eigenschaften:

- (G1)  $\forall a, b, c \in G : (ab)c = a(bc)$  (Assoziativität),
- (G2)  $\exists e \in G \forall a \in G : ae = ea = a$  (Existenz des neutralen Elements),
- (G3)  $\forall a \in G \exists b \in G : ab = ba = e$  (Existenz inverser Elemente).

Das neutrale Element  $e$  und inverse Elemente sind eindeutig bestimmt: Schreibweise  $a^{-1}$ , also  $aa^{-1} = a^{-1}a = e$ .

Eine Gruppe  $(G, \circ)$  mit kommutativer Verknüpfung  $\circ$ , dh mit  $ab = ba$  für alle  $a, b \in G$ , heißt *abelsch*.

**Bemerkung:** In einer Gruppe  $G$  lassen sich die Gleichungen  $ax = b$  und  $xa = b$  (für beliebig gegebene  $a, b \in G$ ) eindeutig lösen:

$$\begin{aligned} ax = b &\iff x = ex = a^{-1}ax = a^{-1}b \\ xa = b &\iff x = xe = xaa^{-1} = ba^{-1}. \end{aligned}$$

**Beispiele:** 1)  $(\mathbb{Z}, +)$  ist eine abelsche Gruppe, neutrales Element ist 0.

2)  $(\mathbb{R}, +)$  und  $(\mathbb{C}, +)$  sind abelsche Gruppen. Ist  $V$  ein Vektorraum, so ist  $(V, +)$  eine abelsche Gruppe.

3)  $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$  ist eine abelsche Gruppe, neutrales Element ist 1.

4) Bzgl. der Matrixmultiplikation ist

$$GL(\mathbb{K}, n) := \{A \in \mathbb{K}^{n \times n} : A \text{ ist invertierbar}\}$$

eine Gruppe (die *allgemeine (generelle) lineare Gruppe*, die für  $n \geq 2$  nicht abelsch ist. Neutrales Element ist die Einheitsmatrix  $I_n$ .

In  $GL(\mathbb{K}, n)$  gibt es viele kleinere Gruppen (sogenannte *Untergruppen*). Neutrales Element ist dabei die Einheitsmatrix  $I_n$ .

5)  $O(n) := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A \text{ ist orthogonal}\}$  ist eine Gruppe, die *orthogonale Gruppe*.

6)  $U(n) := \{A \in \mathbb{C}^{n \times n} : A \text{ ist unitär}\}$  ist eine Gruppe, die *unitäre Gruppe*.

7) Die Teilmenge

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R}, |a| + |b| > 0 \right\} \subseteq \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

ist eine abelsche Gruppe, die  $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$  entspricht.

8) Die Menge

$$\{A \in O(2) : A\vec{e}_1 = \vec{e}_1\}$$

ist eine abelsche Gruppe mit zwei Elementen.

9) Sei  $M := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1| + |x_2| \leq 1\}$ . Die Menge

$$\{A \in O(2) : A(M) = M\}$$

ist eine Gruppe mit acht Elementen.

## 17 Determinanten und Kreuzprodukt

**Idee der Determinante:** Zu gegebenen Vektoren  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^n$  gibt  $\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)$  das mit einem Vorzeichen versehene Volumen des von den Vektoren  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$  aufgespannten *Spat*s

$$\{\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n : \lambda_j \in [0, 1] \text{ für } j = 1, \dots, n\}$$

an. “Mit Vorzeichen versehen” bedeutet dabei, dass  $\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)$  das Vorzeichen wechselt, wenn man einen Vektor  $\vec{a}_j$  durch  $-\vec{a}_j$  ersetzt. Bei  $\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)$  stellen wir uns die Vektoren  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$  als *Spalten* einer *Matrix* vor.

**Beispiel:** Der von den Einheitsvektoren  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$  im  $\mathbb{R}^n$  aufgespannte Spat ist der *Einheitswürfel*

$$Q := [0, 1]^n.$$

Dieser hat Volumen = 1 (Produkt der Seitenlängen).

**17.1. Definierende Eigenschaften der Determinante:** Die Determinante ist eine Abbildung  $\det : \underbrace{\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \times \dots \times \mathbb{K}^n}_n \rightarrow \mathbb{K}$  mit den Eigenschaften

$$(D1) \det(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n) = 1,$$

$$(D2) \text{ für alle } j \in \{1, \dots, n\} \text{ und } \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n, \vec{b}_j \in \mathbb{K}^n \text{ gilt}$$

$$\begin{aligned} & \det(\vec{a}_1, \dots, \alpha \vec{a}_j + \beta \vec{b}_j, \dots, \vec{a}_n) \\ &= \alpha \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_j, \dots, \vec{a}_n) + \beta \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{b}_j, \dots, \vec{a}_n), \end{aligned}$$

$$(D3) \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) = 0, \text{ falls es } j \neq k \text{ gibt mit } \vec{a}_j = \vec{a}_k.$$

**Bemerkung:** Durch die Eigenschaften (D1)–(D3) ist die Determinante  $\det$  eindeutig bestimmt (ohne Beweis). (D1) bedeutet eine Normierung (vgl. Beispiel oben). (D2) bedeutet, dass die Determinante in jeder Spalte *linear* ist. Zusammen mit (D3) bedeutet (D2), dass  $\det$  eine *alternierende Multilinearform* ist.

Beachte außerdem, dass (D2) und (D3) die Idee eines mit Vorzeichen versehenen Volumens umsetzen: Bei (D3) ist der aufgespannte Spat “flach”, hat also kein Volumen; (D2) kann man sich mit Streckung und Scherung veranschaulichen.

**Schreibweise:** Ist  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  die Matrix mit den Spalten  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \in \mathbb{K}^n$ , so schreibt man auch

$$|A| := \det(A) := \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n).$$

Wir betrachten im folgenden  $\det$  meist als Funktion auf  $\mathbb{K}^{n \times n}$ , dh auf dem Raum der quadratischen Matrizen.

**17.2. Folgerungen:** (a) Ist eine Spalte  $= \vec{0}$ , so ist auch die Determinante  $= 0$ .

(b) Man kann zu einer Spalte ein Vielfaches einer anderen Spalte dazuaddieren, ohne den Wert der Determinante zu ändern.

(c) Vertauscht man zwei Spalten miteinander, so ändert sich das Vorzeichen der Determinante.

(d) Sind die Spalten von  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  linear abhängig (dh gilt  $\text{Rang } A < n$ ), so ist  $\det(A) = 0$ .

(e) Es gilt:  $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A$  ist regulär.

**Erinnerung:** Eine Matrix  $\in \mathbb{K}^{n \times n}$  heißt regulär, falls sie invertierbar ist, bzw. falls die zugehörige lineare Abbildung  $\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n, \vec{x} \mapsto A\vec{x}$  bijektiv (oder injektiv oder surjektiv) ist (vgl. 15.16 in HM I).

Der Rang einer Matrix ist die Maximalzahl linear unabhängiger Spalten (oder die Maximalzahl linear unabhängiger Zeilen).

*Beweis.* (a) folgt sofort aus (D2). (b) folgt leicht aus (D2) und (D3).

zu (c): Wegen (b) und (D2) ist

$$\begin{aligned} & \det(\vec{a}_1, \dots, \underbrace{\vec{a}_j}_{k}, \dots, \underbrace{\vec{a}_k}_{j}, \dots, \vec{a}_n) \\ &= \det(\vec{a}_1, \dots, \underbrace{\vec{a}_j + \vec{a}_k}_{k}, \dots, \underbrace{\vec{a}_k}_{j}, \dots, \vec{a}_n) \\ &= \det(\vec{a}_1, \dots, \underbrace{\vec{a}_j + \vec{a}_k}_{k}, \dots, \underbrace{-\vec{a}_j}_{j}, \dots, \vec{a}_n) \\ &= \det(\vec{a}_1, \dots, \underbrace{\vec{a}_k}_{k}, \dots, \underbrace{-\vec{a}_j}_{j}, \dots, \vec{a}_n) \\ &= -\det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n). \end{aligned}$$

Ende Do  
27.04.17

zu (d): Es sei etwa die letzte Spalte Linearkombination der anderen Spalten. Wegen (D2) und (D3) gilt dann:

$$\det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{n-1}, \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \vec{a}_j) = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{n-1}, \vec{a}_j) = 0.$$

Wegen (d) muss man bei (e) nur noch zeigen:  $\text{Rang } A = n$  impliziert  $\det(A) \neq 0$ . Dazu bringen wir  $A$  durch elementare Spaltenumformungen (analog zu Zeilenumformungen, nur für Spalten statt für Zeilen) auf die Gestalt der Einheitsmatrix  $I_n$ . Dabei wird nach (D2) (für  $\vec{b}_j = 0$ ) und (b) und (c)  $\det(A)$  nur mit Zahlen  $\neq 0$  multipliziert. Wegen (D1) ist schließlich  $\det(I_n) = 1 \neq 0$ .  $\square$

**17.3. Der Fall  $n = 2$ :** Es gilt

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc \quad (\text{das ist das } \delta \text{ aus Beispiel 15.16, HM I}),$$

denn die Eigenschaften (D1) und (D3) sind klar, und (D2) ist leicht.

**Beispiele:** (1)  $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - (-3)(-4) = 0$ , die Matrix ist nicht regulär.

(2)  $\begin{vmatrix} i & -4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = i \cdot (-1) - (-4) \cdot 0 = -i$ , die Matrix ist regulär.

**17.4. Der Fall  $n = 3$ :** Es gilt

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} v & w \\ y & z \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} u & w \\ x & z \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} u & v \\ x & y \end{vmatrix} = avz + bwx + cuy - awy - buz - cvx.$$

(D1) ist klar, (D2) ist leicht. (D3) braucht eine Fallunterscheidung, die wir unten im allgemeinen Fall durchführen.

Die *Regel von Sarrus* gilt für  $n = 3$ , **aber nicht für  $n \geq 4$ !**

**Schema:**

$$\begin{array}{ccccccc} & & & a & b & c & \\ & & & w & u & v & w & u \\ & & y & z & x & y & z & x & y \\ \swarrow & \swarrow & \swarrow & & & & \searrow & \searrow & \searrow \\ - & - & - & & & & + & + & + \end{array}$$

**Beispiel:**

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 6 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 0 \cdot 0 \cdot 6 + 0 \cdot 4 \cdot 5 - 0 \cdot 2 \cdot 6 - 0 \cdot 4 \cdot 3 - 1 \cdot 0 \cdot 5 = 6.$$

**17.5. Der allgemeine Fall:** Gegeben sei die Matrix  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  mit den Einträgen  $a_{jk}$ . Für jedes  $k \in \{1, \dots, n\}$  bezeichne  $A_{1k} \in \mathbb{K}^{(n-1) \times (n-1)}$  diejenige Matrix, die aus  $A$  durch Streichen der ersten Zeile und der  $k$ -ten Spalte entsteht.

Man hat die folgende Formel, die das Berechnen von  $\det(A)$  auf das Berechnen der Determinanten kleinerer Matrizen zurückführt:

$$\det(A) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} a_{1k} \det(A_{1k}).$$

Für  $n = 3$  steht hier gerade die Formel aus 17.4, für  $n = 2$  diejenige aus 17.3.

*Beweis.* (D1) ist klar, und (D2) ist nicht so schwer. Zum Beweis von (D3) seien zwei Spalten von  $A$  gleich, etwa die  $k_0$ -te und die  $k_1$ -te, wobei  $k_0 < k_1$ . In der Summe verschwindet dann  $\det(A_{1k})$  für alle  $k \notin \{k_0, k_1\}$ , da in diesen  $A_{1k}$  zwei Spalten gleich sind (weder die  $k_0$ -te noch die  $k_1$ -te sind gestrichen worden). Also ist

$$\det(A) = (-1)^{k_0+1} a_{1k_0} \det(A_{1k_0}) + (-1)^{k_1+1} a_{1k_1} \det(A_{1k_1}).$$

Hierbei ist  $a_{1k_0} = a_{1k_1}$  nach Voraussetzung. Wir erhalten  $A_{1k_1}$  aus  $A_{1k_0}$ , indem wir durch sukzessives Vertauschen benachbarter Spalten die  $k_1 - 1$ -te Spalte (von  $A_{1k_0}$ ) an die  $k_0$ -te Stelle bringen. Dazu brauchen wir  $k_1 - 1 - k_0 = k_1 - k_0 - 1$  Vertauschungen. Also ist

$$\det(A_{1k_1}) = (-1)^{k_1 - k_0 - 1} \det(A_{1k_0}).$$

□

**Beispiel:** Ist  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  von der Form  $\begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ * & d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & \ddots & \ddots & 0 \\ * & * & \cdots & d_{n-1} & 0 \\ * & * & \cdots & * & d_n \end{pmatrix}$ , also eine *untere Dreiecksmatrix*, so gilt  $\det(A) = d_1 \cdot d_2 \cdot \dots \cdot d_n$ .

**17.6. Determinantenentwicklungssatz:** Die Formel in 17.5 nennt man *Entwicklung von  $\det(A)$  nach der ersten Zeile* von  $A = (a_{jk})_{jk}$ . Mit denselben Argumenten kann man  $\det(A)$  nach einer beliebigen Zeile oder Spalte entwickeln:

Für jedes  $l \in \{1, \dots, n\}$  gilt

$$\det(A) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+l} a_{lk} \det(A_{lk}) = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+l} a_{jl} \det(A_{jl}),$$

wobei  $A_{jk} \in \mathbb{K}^{(n-1) \times (n-1)}$  die Matrix bezeichne, die aus  $A$  durch Streichen der  $j$ -ten Zeile und der  $k$ -ten Spalte entsteht.

**Beispiel:** Man entwickelt möglichst nach einer Zeile oder Spalte mit vielen Nullen, hier z.B. nach der zweiten Spalte:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 6 & 0 & 7 \end{vmatrix} = -0 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot (2 \cdot 7 - 3 \cdot 6) = -8.$$

**17.7. Das Signum einer Permutation:** Eine *Permutation* ist eine bijektive Abbildung  $\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ . Die Menge  $S_n$  aller Permutationen von  $\{1, \dots, n\}$  hat genau  $n!$  Elemente.

Eine Permutation  $\sigma \in S_n$  schreibt man zweckmäßigerweise  $(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{smallmatrix})$  oder auch nur  $(\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n))$ .

Für eine Permutation  $\sigma \in S_n$  definiert man das *Signum* (oder *Vorzeichen*)  $\text{sgn } \sigma$  von  $\sigma$  durch

$$\text{sgn } \sigma := \prod_{i < j} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}.$$

Das Produkt hat genau  $\binom{n}{2} = n(n-1)/2$  Faktoren.

Ende Di

**Bemerkung:** (a) Es gilt stets  $\text{sgn } \sigma \in \{1, -1\}$ , genauer ist  $\text{sgn } \sigma = (-1)^m$ , wobei  $m$  die Anzahl der Paare  $(i, j)$  mit  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  und  $i < j$ , aber  $\sigma(i) > \sigma(j)$  ist.

02.05.17

(b) Für  $\sigma, \tau \in S_n$  gilt  $\text{sgn } (\sigma \circ \tau) = \text{sgn } (\sigma) \text{sgn } (\tau)$ . Das folgt aus

$$\frac{\sigma(\tau(j)) - \sigma(\tau(i))}{j - i} = \frac{\sigma(\tau(j)) - \sigma(\tau(i))}{\tau(j) - \tau(i)} \cdot \frac{\tau(j) - \tau(i)}{j - i}.$$

**Beispiele:** (1) Vertauscht  $\tau \in S_n$  gerade zwei bestimmte Zahlen aus  $\{1, \dots, n\}$  (eine solche Permutation heißt *Transposition*), so gilt  $\text{sgn } \tau = -1$ , denn: Vertauscht  $\tau$  etwa die Zahlen  $i_0 < i_1$ , so sind die Paare  $(i, j)$  mit  $i < j$  und  $\sigma(i) > \sigma(j)$  gerade  $(i_0, k)$  und  $(k, i_1)$  mit  $i_0 < k < i_1$  und  $(i_0, i_1)$ . Das  $m$  in Bemerkung (a) ist also ungerade.

(2) Lässt sich  $\sigma$  als Hintereinanderausführung von Transpositionen  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m$  schreiben (dies ist tatsächlich für jede Permutation der Fall), so ist  $\text{sgn } \sigma = 1$  für gerades  $m$  und  $= -1$  für ungerades  $m$ . Das  $m$  ist dabei nicht eindeutig bestimmt!

(3)  $n = 4$ ,  $\sigma = (2, 3, 4, 1)$ : Es ist  $\text{sgn } \sigma = -1$ , zB da man durch drei Transpositionen die 1 nach vorne bekommt. Oder da die Paare  $(i, j)$  mit  $i < j$  und  $\sigma(i) > \sigma(j)$  gerade  $(1, 4), (2, 4), (3, 4)$  sind.

**17.8. Die Leibnizformel für Determinanten:** Gegeben sei die Matrix  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  mit den Einträgen  $a_{jk}$ . Dann gilt

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn } \sigma \cdot a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

(ohne Beweis). Ebenfalls ohne Beweis:

**Folgerung:** Für  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  gilt  $\det(A^T) = \det(A)$ .



**Beispiel:** Ist  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  von der Form  $\begin{pmatrix} d_1 & * & * & \cdots & * \\ 0 & d_2 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & * \\ 0 & 0 & \cdots & d_{n-1} & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$ , also eine *obere Dreiecksmatrix*, so gilt  $\det(A) = d_1 \cdot d_2 \cdot \dots \cdot d_n$ .

**17.9. Determinantenmultiplikationssatz:** Für beliebige  $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$  gilt

$$\det(AB) = \det(A) \det(B).$$

(ohne Beweis).

Insbesondere gilt für eine reguläre Matrix  $A$ :  $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$ .

**Interpretation:** Die Matrix  $B$  habe die Spalten  $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$ . Der von diesen Spalten aufgespannte Spat hat das (mit Vorzeichen versehene) Volumen  $\det(B)$ . Dieser Spat wird von der zur Matrix  $A$  gehörenden linearen Abbildung  $\phi_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \vec{x} \mapsto A\vec{x}$  auf den von den Spalten  $A\vec{b}_1, \dots, A\vec{b}_n$  der Matrix  $AB$  aufgespannten Spat mit (vorzeichenbehaftetem) Volumen  $\det(AB)$  abgebildet.

Bildet man also mit der zur Matrix  $A$  gehörenden Abbildung einen beliebigen Spat ab, **so muss man dessen (vorzeichenbehaftetes) Volumen mit  $\det(A)$  multiplizieren.**

**17.10. Die Cramersche Regel für lineare Gleichungssysteme:** Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem  $A\vec{x} = \vec{b}$ , wobei  $\vec{b} \in \mathbb{K}^n$  sei und  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  die Spalten  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in \mathbb{K}^n$  habe. Wenn die Matrix  $A$  regulär ist, so hat das Gleichungssystem eine eindeutige Lösung  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ , wobei für jedes  $j \in \{1, \dots, n\}$  gilt:

$$x_j = \det(\vec{a}_1, \dots, \underbrace{\vec{b}}_j, \dots, \vec{a}_n) / \det(A).$$

Zur Berechnung der  $j$ -ten Komponente  $x_j$  der Lösung muss man also die  $j$ -te Spalte von  $A$  durch den Vektor  $\vec{b}$  ersetzen, die Determinante berechnen und durch die Determinante von  $A$  dividieren.

*Beweis.* Wir haben  $\vec{b} = \sum_{l=1}^n x_l \vec{a}_l$ , also ist wegen (D2):

$$\det(\vec{a}_1, \dots, \underbrace{\vec{b}}_j, \dots, \vec{a}_n) = \sum_{l=1}^n x_l \det(\vec{a}_1, \dots, \underbrace{\vec{a}_l}_j, \dots, \vec{a}_n).$$

Wegen (D3) bleibt rechts nur der Summand für  $l = j$  stehen, dh  $x_j \det(A)$ . □

**17.11. Eine Formel für die inverse Matrix:** Sei  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  regulär mit Spalten  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in \mathbb{K}^n$ . Geht man zur Berechnung von  $A^{-1}$  wie in 15.16 (HM I) vor und verwendet die Cramersche Regel 17.10, so erhält man

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \left( \det(\vec{a}_1, \dots, \underbrace{\vec{e}_k}_j, \dots, \vec{a}_n) \right)_{j,k=1}^n.$$

Die Formel für  $n = 2$  in Beispiel 15.16 (HM I) ist ein Spezialfall.

**17.12. Orientierung:** Die Idee in 17.1 war, dass  $\det(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$  das mit Vorzeichen versehene Volumen des von  $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n \in \mathbb{R}^n$  aufgespannten Spates beschreibt. Wegen (D2) (und (D1)) nimmt  $\det$  auch negative Werte an. Das eigentliche Volumen ist  $|\det(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)|$ . Aber auch das Vorzeichen von  $\det(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$  trägt Information.

**Zwischenspiel:** Ist  $V$  ein  $n$ -dimensionaler reeller Vektorraum und  $\varphi : V \rightarrow V$  eine lineare Abbildung, so kann man  $\varphi$  eine Determinante  $\det \varphi$  zuordnen, indem man eine Basis  $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n$  von  $V$  wählt, die Abbildung  $\varphi$  bzgl. dieser Basis durch eine Matrix  $A$  darstellt und  $\det \varphi := \det(A)$  setzt.

Ist nämlich  $\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_n$  eine weitere Basis von  $V$ , so erhalten wir die Darstellungsmatrix  $\tilde{A}$  von  $\varphi$  bzgl. dieser Basis als  $\tilde{A} = S^{-1}AS$ , wobei  $S$  die Darstellungsmatrix der Identität  $V \rightarrow V$  ist, wenn man “vorne” die Basis  $\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_n$  und “hinten” die Basis  $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$  nimmt. Wegen 17.9 ist dann

$$\det(\tilde{A}) = \det(S^{-1})\det(A)\det(S) = \det(S)^{-1}\det(A)\det(S) = \det(A) = \det \varphi,$$

dh die Definition ist unabhängig von der Wahl der Basis.

**Definition:** Eine bijektive Abbildung  $\varphi : V \rightarrow V$  heißt *orientierungstreu*, falls  $\det \varphi > 0$  ist, und *orientierungsumkehrend*, falls  $\det \varphi < 0$  ist.

Eine geordnete Basis  $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$  von  $\mathbb{R}^3$  heißt *Rechtssystem*, falls  $\det(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3) > 0$  ist. Meist ist dabei  $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$  eine Orthonormalbasis.

**Satz:** Ist  $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$  ein Rechtssystem in  $\mathbb{R}^3$  und  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  orientierungstreu, so ist auch  $\varphi(\vec{b}_1), \varphi(\vec{b}_2), \varphi(\vec{b}_3)$  ein Rechtssystem.

**Beispiel:**  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  ist ein Rechtssystem,  $\vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{e}_2$  ist kein Rechtssystem.

**17.13. Das Kreuzprodukt (Vektorprodukt) im  $\mathbb{R}^3$ :** Für zwei Vektoren  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3), \vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$  ist das *Kreuzprodukt*  $\vec{x} \times \vec{y} \in \mathbb{R}^3$  derjenige Vektor, der senkrecht auf  $\vec{x}$  und  $\vec{y}$  steht, dessen Länge der Flächeninhalt des von  $\vec{x}$  und  $\vec{y}$  aufgespannten Parallelogramms ist und für den  $\det(\vec{x}, \vec{y}, \vec{x} \times \vec{y}) \geq 0$  ist.

Hieraus ergeben sich folgende **Rechenregeln**:

(0)  $\vec{x} \times \vec{y} = -\vec{y} \times \vec{x}$ .

(1)  $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3$ , allgemeiner  $\vec{e}_{\sigma(1)} \times \vec{e}_{\sigma(2)} = \text{sgn } \sigma \vec{e}_{\sigma(3)}$  für jede Permutation  $\sigma \in S_3$  (denn  $\det(\vec{e}_{\sigma(1)}, \vec{e}_{\sigma(2)}, \vec{e}_{\sigma(3)}) = \text{sgn } \sigma$ ).

(2)  $(\alpha\vec{x} + \beta\vec{w}) \times \vec{y} = \alpha(\vec{x} \times \vec{y}) + \beta(\vec{w} \times \vec{y})$  und  $\vec{x} \times (\alpha\vec{y} + \beta\vec{z}) = \alpha(\vec{x} \times \vec{y}) + \beta(\vec{x} \times \vec{z})$  für alle  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  und  $\vec{x}, \vec{w}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3$ , dh das Kreuzprodukt ist linear in jeder Komponente.

(3) Für alle  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$  und  $\alpha \in \mathbb{R}$  gilt

$$\vec{x} \times \vec{y} = \vec{x} \times (\vec{y} + \alpha\vec{x}) = (\vec{x} + \alpha\vec{y}) \times \vec{y},$$

dh man kann zu einer Variablen ein Vielfaches der anderen dazuaddieren.

(4) Es gilt  $\vec{x} \times \vec{y} = \vec{0}$  genau dann, wenn  $\vec{x}, \vec{y}$  linear abhängig sind.

**Anwendung Lorentzkraft:** Eine in einem Magnetfeld der Flussdichte  $\vec{B}$  mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  bewegte elektrische Ladung  $q$  erfährt die *Lorentzkraft*

$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

und wird dadurch abgelenkt (zB  $\rightarrow$  Elektromotor). Das durch  $\vec{v}$  und  $\vec{B}$  aufgespannte Parallelogramm hat den Flächeninhalt  $\|\vec{v}\|\|\vec{B}\|\sin \varphi$ , wobei  $\varphi$  der Winkel zwischen  $\vec{v}$  und  $\vec{B}$  ist. Die größte Kraft wirkt somit, wenn  $\vec{v}$  und  $\vec{B}$  zueinander senkrecht sind. Sind hingegen  $\vec{v}$  und  $\vec{B}$  parallel, so ist  $\vec{F} = \vec{0}$  und es wirkt keine Kraft.

**Berechnung:** Man berechnet  $\vec{x} \times \vec{y}$  formal über eine Determinante

$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}.$$

**Begründung:** Bezeichnet man die rechte Seite mit  $\vec{z}$ , so sieht man leicht  $(\vec{z}|\vec{x}) = \det(\vec{x}, \vec{x}, \vec{y}) = 0$  und  $(\vec{z}|\vec{y}) = \det(\vec{y}, \vec{x}, \vec{y}) = 0$  ein. Außerdem ist

$$\det(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = \det(\vec{z}, \vec{x}, \vec{y}) = \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \|\vec{z}\|^2 \geq 0.$$

Der Flächeninhalt  $a$  des von  $\vec{x}, \vec{y}$  aufgespannten Parallelogramms ist gegeben durch  $a = \|\vec{x}\|\|\vec{y}\|\sin \varphi$ , wobei  $\varphi$  der von  $\vec{x}$  und  $\vec{y}$  eingeschlossene Winkel ist. Wegen  $(\vec{x}|\vec{y}) = \|\vec{x}\|\|\vec{y}\|\cos \varphi$  erhalten wir

$$a^2 = \|\vec{x}\|^2\|\vec{y}\|^2(1 - \cos^2 \varphi) = \|\vec{x}\|^2\|\vec{y}\|^2 - (\vec{x}|\vec{y})^2.$$

Nun rechnet man nach, dass

$$\|\vec{z}\|^2 + (\vec{x}|\vec{y})^2 = \|\vec{x}\|^2\|\vec{y}\|^2$$

gilt (zur Übung empfohlen).

**Beispiel:**

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{x} \times \vec{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1) \cdot 3 - 2 \cdot 5 \\ 2 \cdot (-1) - 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot 5 - (-1) \cdot (-1) \end{pmatrix}.$$

**Warnung:** Das Kreuzprodukt ist nicht assoziativ! So ist zB

$$(\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \times \vec{e}_2 = -\vec{e}_1, \quad \vec{e}_1 \times (\vec{e}_2 \times \vec{e}_2) = \vec{e}_1 \times \vec{0} = \vec{0}.$$

**17.14. Das Spatprodukt:** Für  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3$  heißt  $(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z} = (\vec{x} \times \vec{y}|\vec{z})$  das *Spatprodukt* von  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ .

**Satz:** Es gilt  $(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z} = \det(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ .

*Beweis.* Man weist für die linke Seite die Eigenschaften (D1)–(D3) der Determinante nach.  $\square$

**Beispiel:**  $\|\vec{x} \times \vec{y}\|^2 = (\vec{x} \times \vec{y}) \cdot (\vec{x} \times \vec{y}) = \det(\vec{x}, \vec{y}, \vec{x} \times \vec{y})$  (vgl. die Begründung oben). Anschaulich ist das auch klar, da  $\det(\vec{x}, \vec{y}, \vec{x} \times \vec{y})$  das Volumen des aufgespannten Spates ist, welches man wegen der Orthogonalität von  $\vec{x} \times \vec{y}$  auf dem durch  $\vec{x}, \vec{y}$  aufgespannten Parallelogramm als Produkt von  $\|\vec{x} \times \vec{y}\|$  mit der Parallelogrammfläche erhält.

Sind  $\vec{x}, \vec{y}$  linear unabhängig, so ist  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{x} \times \vec{y}$  eine Basis von  $\mathbb{R}^3$  und zwar ein Rechtssystem.

Eine Basis  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$  von  $\mathbb{R}^3$  ist genau dann ein Rechtssystem, wenn  $\vec{z}$  auf derselben Seite der durch  $\vec{x}, \vec{y}$  aufgespannten Ebene liegt wie  $\vec{x} \times \vec{y}$ .

## 18 Eigenwerte und Diagonalisierung von Matrizen

**18.1. Eigenwerte und Eigenvektoren:** Sei  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ . Ein  $\lambda \in \mathbb{C}$  heißt *Eigenwert* von  $A$ , falls es ein  $\vec{x} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\vec{0}\}$  gibt mit

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}.$$

Jedes solche  $\vec{x}$  heißt *Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda$*  (von  $A$ ).

Der *Eigenraum von  $A$  zum Eigenwert  $\lambda$*  ist

$$E_A(\lambda) := \{\vec{x} \in \mathbb{C}^n : A\vec{x} = \lambda\vec{x}\}.$$

Er besteht aus  $\vec{0}$  und allen Eigenvektoren von  $A$  zum Eigenwert  $\lambda$ .

Sei  $V$  ein  $\mathbb{C}$ -Vektorraum und  $\varphi : V \rightarrow V$  linear. Ein  $\lambda \in \mathbb{C}$  heißt *Eigenwert* von  $\varphi$ , falls es ein  $v \in V \setminus \{0\}$  gibt mit

$$\varphi(v) = \lambda v.$$

Jedes solche  $v$  heißt *Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda$*  (von  $\varphi$ ). Den Eigenraum definiert man entsprechend.

**Beachte:**  $\vec{0}$  ist kein Eigenvektor!

**Beispiele:** (1) 1 ist der einzige Eigenwert von  $I_n$ .

(2) Die Diagonalelemente  $d_1, d_2, \dots, d_n$  einer Diagonalmatrix  $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$

sind Eigenwerte von  $D$ . Für  $j = 1, \dots, n$  ist der  $j$ -te Einheitsvektor  $\vec{e}_j$  ein Eigenvektor zum Eigenwert  $d_j$ .

(3) Die reelle Matrix  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  hat den Eigenwert  $i$  mit Eigenvektor  $\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Wir betrachten von nun an komplexe Matrizen.

**18.2. Bemerkungen (geometrische Vielfachheit):** Sei  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Dann gilt:

(a) Ein  $\lambda \in \mathbb{C}$  ist Eigenwert von  $A$  genau dann, wenn  $\text{Kern}(A - \lambda I_n) \neq \{\vec{0}\}$  ist. In diesem Fall ist  $E_A(\lambda) = \text{Kern}(A - \lambda I_n)$ .

(b) Zu jedem Eigenwert  $\lambda$  von  $A$  ist  $E_A(\lambda)$  ein Untervektorraum von  $\mathbb{C}^n$  mit  $m := \dim(E_A(\lambda)) \geq 1$ . Die Zahl  $m$  heißt *geometrische Vielfachheit des Eigenwertes  $\lambda$* .

(c) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig.

(d) Sind  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  die verschiedenen Eigenwerte von  $A$ , so gilt  $k \leq n$  und

$$\dim(E_A(\lambda_1)) + \dim(E_A(\lambda_2)) + \dots + \dim(E_A(\lambda_k)) \leq n,$$

dh die Summe der geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte von  $A$  ist höchstens  $n$ .

*Beweis.* (d) folgt aus (c). (c) zeigt man durch Induktion nach der Anzahl  $k$  verschiedener Eigenwerte. Der Induktionsanfang  $k = 1$  ist klar. Für den Induktionsschritt seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_{k+1}$  verschiedene Eigenwerte mit zugehörigen Eigenvektoren  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{k+1}$ . Zum Beweis von deren Unabhängigkeit seien  $\alpha_1, \dots, \alpha_{k+1} \in \mathbb{C}$  mit  $\sum_{j=1}^{k+1} \alpha_j \vec{x}_j = \vec{0}$ . Durch Multiplikation mit  $A$  bzw. mit  $\lambda_{k+1}$  folgt

$$\vec{0} = \sum_{j=1}^{k+1} \alpha_j A \vec{x}_j = \sum_{j=1}^{k+1} \alpha_j \lambda_j \vec{x}_j \quad \text{und} \quad \vec{0} = \sum_{j=1}^{k+1} \alpha_j \lambda_{k+1} \vec{x}_j.$$

Durch Differenzbildung erhalten wir

$$\vec{0} = \sum_{j=1}^{k+1} \alpha_j (\lambda_j - \lambda_{k+1}) \vec{x}_j = \sum_{j=1}^k \alpha_j (\lambda_j - \lambda_{k+1}) \vec{x}_j.$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist dann  $\alpha_j (\lambda_j - \lambda_{k+1}) = 0$  für  $j = 1, \dots, k$ , also  $\alpha_j = 0$  für  $j = 1, \dots, k$  wegen  $\lambda_j \neq \lambda_{k+1}$ . Schließlich folgt auch  $\alpha_{k+1} = 0$  wegen  $\vec{x}_{k+1} \neq 0$ .  $\square$

**Beispiel:** Die Matrix  $A$  aus Beispiel 18.1(3) hat genau die Eigenwerte  $i, -i$  und es gilt  $E_A(i) = \text{lin}\left\{\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ ,  $E_A(-i) = \text{lin}\left\{\begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$ . Die geometrische Vielfachheit von  $i$  und  $-i$  ist also jeweils 1.

Ende M  
08.05.17

**18.3. Charakteristisches Polynom und algebraische Vielfachheit:** Sei  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  eine Matrix. Das *charakteristische Polynom*  $\chi_A$  von  $A$  ist gegeben durch

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Das charakteristische Polynom ist ein Polynom vom Grad  $n$  (wg. 17.8).

Ein  $\lambda \in \mathbb{C}$  ist Eigenwert von  $A$  genau dann, wenn  $\lambda$  Nullstelle von  $p_A$  ist (vgl 17.2(e) und 18.2(a)).

**Definition:** Die *algebraische Vielfachheit eines Eigenwertes*  $\lambda$  von  $A$  ist die Vielfachheit von  $\lambda$  als Nullstelle des charakteristischen Polynoms  $p_A$ .

**Bemerkung:** Die geometrische Vielfachheit eines Eigenwertes ist immer  $\leq$  seiner algebraischen Vielfachheit.

Sind  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  die verschiedenen Eigenwerte und  $m_1, m_2, \dots, m_k$  die jeweiligen algebraischen Vielfachheiten, so gilt  $m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$  (vgl. 5.4, HM I).

**Beispiele:** (1) Der Eigenwert 1 von  $I_n$  hat algebraische und geometrische Vielfachheit  $n$ : Es ist  $E_{I_n}(1) = \mathbb{C}^n$  und  $p_{I_n}(\lambda) = \det(I_n - \lambda I_n) = (1 - \lambda)^n$ .

(2) In Beispiel 18.2 haben  $i$  und  $-i$  jeweils algebraische und geometrische Vielfachheit 1. Es ist  $p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1 = (\lambda - i)(\lambda + i)$ .

(3) Der Eigenwert 1 der Matrix  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  hat algebraische Vielfachheit 2 und geometrische Vielfachheit 1: Es gilt  $p_A(\lambda) = (1 - \lambda)^2 = (\lambda - 1)^2$  und  $E_A(1) = \text{Kern} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{lin}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ .

**18.4. Ähnliche Matrizen:** Zwei Matrizen  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$  heißen *ähnlich*, falls es eine reguläre Matrix  $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$  gibt mit  $B = S^{-1}AS$ .

**Bemerkung:** (a) Es gilt dann  $A = SBS^{-1}$ , denn

$$SBS^{-1} = S(S^{-1}AS)S^{-1} = \underbrace{(SS^{-1})}_{=I} A \underbrace{(SS^{-1})}_{=I} = A,$$

dh auch  $B, A$  sind ähnlich.

(b) Sind  $A, B$  ähnlich und  $B, C$  ähnlich, so sind auch  $A, C$  ähnlich, denn  $B = S^{-1}AS$  und  $C = R^{-1}BR$  implizieren

$$C = R^{-1}S^{-1}ASR = (SR)^{-1}A(SR)$$

und mit  $S$  und  $R$  ist auch  $SR$  regulär.

(c) Ähnliche Matrizen haben dieselbe Determinante und dieselben Eigenwerte mit denselben algebraischen und geometrischen Vielfachheiten. Ist nämlich  $B = S^{-1}AS$ , so gilt

$$\det(B) = (\det(S))^{-1} \det(A) \det(S) = \det(A)$$

und

$$p_B(\lambda) = \det(S^{-1}AS - \lambda I) = \det(S^{-1}(A - \lambda I)S) = \det(A - \lambda I) = p_A(\lambda).$$

Also sind Eigenwerte und algebraische Vielfachheiten gleich. Weiter gilt für jeden Eigenwert  $\lambda$  von  $A$ :

$$\begin{aligned} E_A(\lambda) &= \{\vec{x} \in \mathbb{C}^n : A\vec{x} = \lambda\vec{x}\} = \{\vec{x} \in \mathbb{C}^n : S^{-1}A\vec{x} = \lambda S^{-1}\vec{x}\} \\ &= S(\{\vec{y} \in \mathbb{C}^n : \underbrace{S^{-1}AS}_{B}\vec{y} = \lambda\vec{y}\}) = S(E_B(\lambda)), \end{aligned}$$

wobei wir  $\vec{x} = S\vec{y}$  geschrieben haben. Umgekehrt gilt  $E_B(\lambda) = S^{-1}(E_A(\lambda))$ . Da  $S$  regulär ist, haben  $E_A(\lambda)$  und  $E_B(\lambda)$  dieselbe Dimension.

**Skizze:**

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n & \xrightarrow{A} & \mathbb{C}^n \\ S \uparrow & & \downarrow S^{-1} \\ \mathbb{C}^n & \xrightarrow{B} & \mathbb{C}^n \end{array}$$

Man kann die Skizze so interpretieren, dass die zur Matrix  $A$  gehörige lineare Abbildung  $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$  in der durch die Spalten der regulären Matrix  $S$  gegebenen Basis durch die Matrix  $B$  dargestellt wird.

**Beispiel:** Sei  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$  und  $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ . Die Matrix  $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  ist regulär.

Es gilt  $S^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  und  $S^{-1}AS = B$ . Also sind  $A, B$  ähnlich.

Ist  $\varphi_A$  die lineare Abbildung  $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ , so wird  $\varphi$  bzgl. der Basis  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  durch die Matrix  $B$  dargestellt, dh  $\varphi$  streckt in Richtung von  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  um den Faktor 4 und in Richtung  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  um den Faktor 2.

**Anwendung:** Gegeben sei das lineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} x'(t) &= 3x(t) + y(t), \\ y'(t) &= x(t) + 3y(t). \end{aligned}$$

Setzt man  $\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} := S^{-1} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ , so erhält man

$$\begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = S^{-1} A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \underbrace{S^{-1}AS}_{=B} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix},$$

also das entkoppelte System  $u'(t) = 4u(t)$ ,  $v'(t) = 2v(t)$ , welches sich leicht lösen lässt:  $u(t) = ae^{4t}$ ,  $v(t) = be^{2t}$ . Die Lösungen des ursprünglichen Systems erhält man dann durch

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae^{4t} + be^{2t} \\ ae^{4t} - be^{2t} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Die eindeutige Lösung zum Anfangswert  $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  ist wegen  $\begin{pmatrix} a+b \\ a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \iff a = b = 1/2$  also gegeben durch  $x(t) = (e^{4t} + e^{2t})/2$ ,  $y(t) = (e^{4t} - e^{2t})/2$  für  $t \in \mathbb{R}$ .

**18.5. Die Spur einer Matrix:** Für  $A = (a_{jk})_{jk} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  definiert man die *Spur* von  $A$  durch

$$\text{Spur}(A) = \sum_{j=1}^n a_{jj},$$

dh als Summe der Diagonaleinträge.



**Satz:** (a) Für  $A, C \in \mathbb{C}^{n \times n}$  gilt  $\text{Spur}(AC) = \text{Spur}(CA)$ .

(b) Ähnliche Matrizen haben dieselbe Spur.

(c) Ist  $p_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$  das charakteristische Polynom der Matrix  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , so gilt  $a_{n-1} = (-1)^{n-1} \text{Spur}(A)$  und  $a_0 = \det(A)$ .

*Beweis.* (a) Gilt  $C = (c_{kl})_{kl}$ , so ist  $AC = (\sum_{k=1}^n a_{jk} c_{kl})_{jl}$  und  $CA = (\sum_{j=1}^n c_{lj} a_{jk})_{lk}$ , also

$$\text{Spur}(AC) = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{k=1}^n a_{jk} c_{kj} \right) = \sum_{k=1}^n \left( \sum_{j=1}^n c_{kj} a_{jk} \right) = \text{Spur}(CA).$$

(b) Unter Verwendung von (a) gilt für eine reguläre Matrix  $S$ :

$$\text{Spur}(\underbrace{S^{-1}A}_{=C}S) = \text{Spur}(SS^{-1}A) = \text{Spur}(A).$$

(c)  $a_0 = p_A(0) = \det(A - 0 \cdot I) = \det(A)$ . Aussage über  $a_{n-1}$  ohne Beweis ( $n = 2$  siehe unten, man kann einen Induktionsbeweis führen und z.B.  $\det(A - \lambda I)$  nach der ersten Zeile entwickeln).  $\square$

**Beispiel:** Für  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  gilt

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = \underbrace{ad - bc}_{=\det(A)} - \underbrace{(a+d)}_{=\text{Spur}(A)} \lambda + \lambda^2.$$

Hier sind die Eigenwerte von  $A$  sogar durch  $\det A$  und  $\text{Spur } A$  eindeutig bestimmt.

**18.6. Diagonalisierung von Matrizen:** Eine Matrix  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  heißt *diagonalisierbar*, falls sie ähnlich zu einer Diagonalmatrix  $D$  ist, dh falls es eine reguläre Matrix  $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$  so gibt, dass  $S^{-1}AS$  eine Diagonalmatrix ist.

**Beispiel:** Nach dem Beispiel in 18.4 ist  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$  diagonalisierbar.

**Bemerkung:** Auf der Diagonalen von  $D$  müssen dann die Eigenwerte von  $A$  stehen, gemäß

ihrer algebraischen Vielfachheit wiederholt. Ist nämlich  $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix}$ , so ist

jedes  $d \in \{d_j : j = 1, \dots, n\}$  ein Eigenwert von  $D$  mit algebraischer Vielfachheit = Anzahl der  $j \in \{1, \dots, n\}$  mit  $d_j = d$ . Der Eigenraum zu  $d$  ist

$$E_D(d) = \text{Kern}(D - dI) = \text{lin}\{\vec{e}_j : j \in \{1, \dots, n\}, d_j = d\},$$

also stimmt die geometrische Vielfachheit von  $d$  mit der algebraischen Vielfachheit überein.

**Satz:** Eine Matrix  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  ist genau dann diagonalisierbar, wenn für jeden Eigenwert von  $A$  geometrische und algebraische Vielfachheit übereinstimmen.

Eine entsprechende Matrix  $S$  erhält man folgendermaßen: Man wähle in jedem Eigenraum eine Basis und schreibe die Vektoren als Spalten  $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \dots, \vec{s}_n$  in eine Matrix  $S$ . Ist  $\lambda_j$  der Eigenwert zum Eigenvektor  $\vec{s}_j$ , so erhält man  $AS = SD$ , wobei  $D$  die Diagonalmatrix mit  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  auf der Diagonalen ist (die Matrix  $SD$  hat die Spalten  $\lambda_1 \vec{s}_1, \lambda_2 \vec{s}_2, \dots, \lambda_n \vec{s}_n$ ). Die Matrix  $S$  ist regulär und es ist  $S^{-1}AS = D$ .

Ende Di  
09.05.17

**Beispiel:** Wir betrachten  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ . Es gilt

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 4)(\lambda - 1)^2,$$

also ist 4 Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit 1, und 1 ist Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit 2. Für die Eigenräume gilt

$$E_A(4) = \text{Kern} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

und

$$E_A(1) = \text{Kern} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\},$$

dh für jeden Eigenwert von  $A$  sind algebraische und geometrische Vielfachheit gleich und  $A$  ist diagonalisierbar. Wir setzen

$$S := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

und erhalten

$$S^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Bemerkung:** Folgende Eigenschaften sind ebenfalls äquivalent zur Diagonalisierbarkeit von  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ :

- (a)  $A$  hat  $n$  unabhängige Eigenvektoren, dh  $\mathbb{C}^n$  hat eine Basis aus Eigenvektoren von  $A$ .  
 (b) Die Summe der geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte von  $A$  ist  $n$ .

**Folgerung:** Hat die Matrix  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$   $n$  verschiedene Eigenwerte, so ist sie diagonalisierbar (dann ist nämlich für jeden Eigenwert algebraische und geometrische Vielfachheit = 1).

**18.7. Symmetrische und hermitesche Matrizen:** Eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mit  $A = A^T$  heißt *symmetrisch*. Eine Matrix  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  mit  $A = A^*$  heißt *hermitesch* oder *selbstadjungiert*.

**Beispiele:** Die Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  aus dem Beispiel in 18.4 ist symmetrisch. Die Matrix  $\begin{pmatrix} 0 & -2i \\ 2i & 0 \end{pmatrix}$  ist hermitesch.

**Satz:** (a) Eine hermitesche Matrix  $A$  hat nur reelle Eigenwerte. Die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind paarweise orthogonal.

(b) Jede hermitesche Matrix  $A$  läßt sich diagonalisieren, wobei die Matrix  $S$  unitär, dh mit  $S^* = S^{-1}$ , gewählt werden kann. Für reelle symmetrische Matrizen kann  $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$  orthogonal, dh mit  $S^T = S^{-1}$  gewählt werden (ohne Beweis).

*Beweis.* zu (a): Für jedes  $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$  gilt

$$(A\vec{x}|\vec{x}) = (\vec{x}|A^*\vec{x}) = (\vec{x}|A\vec{x}) = \overline{(A\vec{x}|\vec{x})}, \text{ dh } (A\vec{x}|\vec{x}) \in \mathbb{R}.$$

Sei  $\lambda$  ein Eigenwert von  $A$  und  $\vec{x}$  ein zugehöriger Eigenvektor. Dann gilt

$$\lambda \|\vec{x}\|^2 = (\lambda\vec{x}|\vec{x}) = (A\vec{x}|\vec{x}) \in \mathbb{R}, \text{ also } \lambda = \frac{(A\vec{x}|\vec{x})}{\|\vec{x}\|^2} \in \mathbb{R}.$$

Ist  $\mu \neq \lambda$  ein weiterer Eigenwert mit Eigenvektor  $\vec{y}$ , so gilt

$$\lambda(\vec{x}|\vec{y}) = (\lambda\vec{x}|\vec{y}) = (A\vec{x}|\vec{y}) = (\vec{x}|A\vec{y}) = (\vec{x}|\mu\vec{y}) = \mu(\vec{x}|\vec{y}),$$

also  $(\vec{x}|\vec{y}) = 0$  wegen  $\lambda \neq \mu$ . □

**Beispiele:** Die symmetrische Matrix  $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$  läßt sich durch die orthogonale Matrix  $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  diagonalisieren (siehe 18.4 und 18.6).

Die Matrix  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  aus dem Beispiel in 18.6 ist symmetrisch, die dort angegebene Matrix  $S$  ist nicht orthogonal. Hier reicht es nicht, die gefundenen Eigenvektoren auf Länge 1 zu bringen, da die beiden Eigenvektoren zum Eigenwert 4 nicht

orthogonal sind. Wir können aber das Gram-Schmidt-Verfahren verwenden und setzen

$$\begin{aligned}\vec{s}_1 &:= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, & \vec{s}_2 &:= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \\ \vec{c} &:= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| \vec{s}_2 \right) \vec{s}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \\ \vec{s}_3 &:= \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Die Matrix mit den Spalten  $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{s}_3$  ist orthogonal und diagonalisiert  $A$ .

**Bemerkung:** Allgemeiner gilt, dass sich eine Matrix  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  genau dann unitär diagonalisieren läßt, wenn sie *normal* ist, dh genau dann, wenn  $AA^* = A^*A$  gilt.

Es sei noch der folgende tiefliegendere Satz angegeben:

**18.8. Satz (Jordan-Normalform):** Zu jeder Matrix  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  gibt es eine reguläre Matrix  $S$  so, dass  $S^{-1}AS$  die folgende Blockmatrix-Struktur hat

$$S^{-1}AS = J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_l \end{pmatrix},$$

wobei jedes  $J_j$  (*Jordanblock*) die Gestalt

$$J_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \lambda_j & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_j \end{pmatrix}$$

hat, dh auf der Hauptdiagonalen steht bei  $J_j$  ein Eigenwert, auf der Nebendiagonalen stehen Einsen.

Insgesamt stehen in der *Jordannormalform*  $J$  auf der Diagonalen die Eigenwerte von  $A$ , gemäß ihren Vielfachheiten wiederholt und auf der Nebendiagonalen stehen nur Einsen und Nullen. Dabei ist die Anzahl der Einsen gerade  $n$  minus die Summe der geometrischen Vielfachheiten aller Eigenwerte.

**Bemerkung:** Die Spalten der Matrix  $S$  erhält man hier durch eine geeignete Wahl von Basen in den *Haupträumen*  $\text{Kern}((A - \lambda I_n)^n)$ , wobei  $\lambda$  die Eigenwerte von  $A$  durchläuft.

**Beispiel** (zum Hauptraum): Sei  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Dann gilt  $p_A(\lambda) = -\lambda^3$ , dh 0 ist

einzigster Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit 3. Es gilt  $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  und  $A^3 = 0$ , also  $\dim \text{Kern}(A) = 1$ ,  $\dim(\text{Kern}(A^2)) = 2$  und  $\dim(\text{Kern}(A^3)) = 3$ .

**Folgerung:** Sei  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  und seien  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  die Eigenwerte von  $A$ , wobei jeder Eigenwert gemäß seiner algebraischen Vielfachheit wiederholt sei. Dann gilt

$$\det(A) = \det(J) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n \quad \text{und} \quad \text{Spur}(A) = \text{Spur}(J) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n,$$

dh  $\det(A)$  ist das Produkt der Eigenwerte und  $\text{Spur}(A)$  ist die Summe der Eigenwerte.

Ende Do  
11.05.17

**Beispiel** (zur Jordan-Normalform): Sei  $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Dann gilt  $p_A(\lambda) = (\lambda - 2)^2$ , also ist 2 Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit 2. Weiter ist

$$E_A(2) = \text{Kern}(A - 2I) = \text{Kern} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

also hat der Eigenwert 2 die geometrische Vielfachheit 1 und  $\vec{s}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  ist Eigenvektor. Nun sucht man einen Vektor  $\vec{s}_2$  mit  $(A - 2I)\vec{s}_2 = \vec{s}_1$  und findet  $\vec{s}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Sei nun  $S$  die Matrix mit den Spalten  $\vec{s}_1, \vec{s}_2$ . Dann haben wir

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

wobei die Jordan-Normalform hier nur einen Jordan-Block hat.

**18.9. Definitheit reller symmetrischer Matrizen:** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  symmetrisch und  $q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\vec{x} \mapsto \vec{x}^T A \vec{x}$ , die zugehörige *quadratische Form*.

$A$  heißt *positiv definit*, falls  $\vec{x}^T A \vec{x} > 0$  für alle  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ .

$A$  heißt *negativ definit*, falls  $\vec{x}^T A \vec{x} < 0$  für alle  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ .

$A$  heißt *positiv semidefinit*, falls für alle  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  gilt:  $\vec{x}^T A \vec{x} \geq 0$ .

$A$  heißt *negativ semidefinit*, falls für alle  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  gilt:  $\vec{x}^T A \vec{x} \leq 0$ .

$A$  heißt *indefinit*, falls es  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$  gibt mit  $\vec{x}^T A \vec{x} > 0$  und  $\vec{y}^T A \vec{y} < 0$ .

**Bemerkung:** Ist  $A = (a_{jk})_{jk} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , so gilt

$$q(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk} x_j x_k \quad \text{für alle } \vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

**Beispiel:** Für  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$  und  $\vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  gilt

$$\vec{x}^T A \vec{x} = 3x_1^2 + x_1x_2 + x_2x_1 + 3x_2^2 = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 = 2x_1^2 + 2x_2^2 + (x_1 + x_2)^2.$$

Also ist  $A$  positiv definit.

**Satz:** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  symmetrisch. Dann gilt:

$A$  ist positiv definit genau dann, wenn alle Eigenwerte von  $A$  positiv sind.

$A$  ist negativ definit genau dann, wenn alle Eigenwerte von  $A$  negativ sind.

$A$  ist positiv semidefinit genau dann, wenn  $\lambda \geq 0$  für alle Eigenwerte von  $A$  gilt.

$A$  ist negativ semidefinit genau dann, wenn  $\lambda \leq 0$  für alle Eigenwerte von  $A$  gilt.

$A$  ist indefinit genau dann, wenn  $A$  sowohl positive als auch negative Eigenwerte hat.

*Beweis.* Seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  die Eigenwerte von  $A$  (gemäß algebraischer Vielfachheit wiederholt). Diagonalisiere  $A$  mit einer orthogonalen Matrix  $S$ :  $S^T A S = D$ , wobei  $D$  die Spalten  $\lambda_1 \vec{e}_1, \dots, \lambda_n \vec{e}_n$  hat. Schreibe  $\vec{x} = S \vec{y}$ , wobei  $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$ . Dann ist  $\vec{x} = \vec{0}$  äquivalent zu  $\vec{y} = \vec{0}$  und

$$\vec{x}^T A \vec{x} = \vec{y}^T S^T A S \vec{y} = \vec{y}^T D \vec{y} = \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j^2.$$

□

**Folgerung:** Sei  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  symmetrisch. Dann ist  $A$  indefinit genau dann, wenn  $\det(A) < 0$  ist.

$A$  ist positiv definit genau dann, wenn  $\det(A) > 0$  und  $\text{Spur}(A) > 0$  ist.

$A$  ist negativ definit genau dann, wenn  $\det(A) > 0$  und  $\text{Spur}(A) < 0$  ist.

**Beispiele:** Die Matrix  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  ist indefinit. Die Matrix  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  ist positiv definit. Die Matrix  $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$  ist negativ definit.

Für größere Matrizen kann man das folgende verwenden:

**Kriterium von Hurwitz:** Eine symmetrische Matrix  $A = (a_{jk})_{jk} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ist positiv definit genau dann, wenn alle *Hauptunterdeterminanten* positiv sind, dh wenn

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix} > 0$$

für alle  $m = 1, 2, \dots, n$  gilt.

**18.10. Ergänzung: Allgemeine quadratische Formen:** Eine *allgemeine quadratische Form*  $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  hat die Gestalt  $q(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x} + 2\vec{b}^T \vec{x} + c$ , wobei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  symmetrisch ist und  $\vec{b} \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}$  sind.

**Beispiel:**

$$\begin{aligned} q(x_1, x_2) &= 2x_1x_2 + 4x_1 + 2x_2 + 7 \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + 7. \end{aligned}$$

**18.11. Ergänzung: Quadriken und Hauptachsentransformation:** Sei  $q(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x} + 2\vec{b}^T \vec{x} + c$  eine allgemeine quadratische Form auf dem  $\mathbb{R}^n$ . Die Menge  $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : q(\vec{x}) = 0\}$  heißt *Quadrik* und für  $n = 2$  auch *Kegelschnitt*.

Für Quadriken gibt es bestimmte Normalformen.

**Satz:** Sei  $q(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x} + 2\vec{b}^T \vec{x} + c$  eine allgemeine quadratische Form auf dem  $\mathbb{R}^n$ . Sei  $r = \text{Rang}(A)$  und seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  die von Null verschiedenen Eigenwerte von  $A$  (gemäß ihrer Vielfachheit wiederholt). Dann gibt es eine orthogonale Matrix  $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mit  $\det(V) = 1$  und einen Vektor  $\vec{p} \in \mathbb{R}^n$  derart, dass die Quadrik  $\{\vec{y} \in \mathbb{R}^n : q(V\vec{y} + \vec{p}) = 0\}$  durch eine der folgenden Gleichungen gegeben ist:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^r \lambda_j y_j^2 + \beta &= 0, \quad \text{falls } \text{Rang}(A|\vec{b}) = \text{Rang}(A) = r, \\ \sum_{j=1}^r \lambda_j y_j^2 + 2\gamma y_n &= 0, \quad \text{falls } \text{Rang}(A|\vec{b}) > \text{Rang}(A) = r. \end{aligned}$$

**Bemerkung:** Ist im ersten Fall  $\beta \neq 0$ , so kann man durch  $-\beta$  dividieren und für jedes  $j = 1, \dots, r$  Zahlen  $\alpha_j > 0$  definieren durch  $|\lambda_j/\beta| = \alpha_j^{-2}$ . Sind  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$  die Spalten von  $V$ , so heißen die Geraden  $\vec{p} + \text{lin}\{\vec{v}_j\}$ ,  $j = 1, \dots, r$ , *Hauptachsen* und die zugehörigen  $\alpha_j$  *Achsenabschnitte*.

**Beweisidee:** Im Fall  $r < n$  setze  $\lambda_{r+1} = \dots = \lambda_n = 0$ . Diagonalisiere  $A$  durch eine orthogonale Matrix  $V$  mit  $\det(V) = 1$ , dh  $V^T A V = D$ . Dann gilt für jeden Vektor  $\vec{p} \in \mathbb{R}^n$ :

$$\hat{q}(\vec{y}) := q(V\vec{y} + \vec{p}) = \vec{y}^T V^T A V \vec{y} + 2(\vec{b}^T + \vec{p}^T A) V \vec{y} + q(\vec{p}).$$

Dabei ist  $\vec{y}^T V^T A V \vec{y} = \sum_{j=1}^r \lambda_j y_j^2$ . Wir können den linearen Term  $2(\vec{b}^T + \vec{p}^T A) V \vec{y}$  eliminieren, wenn wir  $\vec{p}$  finden mit  $\vec{p}^T A = -\vec{b}^T$ , dh wenn das lineare Gleichungssystem  $A(-\vec{p}) = \vec{b}$  lösbar ist, dh wenn  $\text{Rang}(A|\vec{b}) = \text{Rang}(A) = r$  gilt. Das führt auf die erste Gleichung.

Der Fall  $\text{Rang}(A|\vec{b}) > \text{Rang}(A) = r$  ist komplizierter und führt auf die zweite Gleichung.

**Beispiel:** Sei  $A = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$ ,  $b = \begin{pmatrix} -16 \\ -2 \end{pmatrix}$ ,  $c = 24$  und  $q(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x} + 2\vec{b}^T \vec{x} + c$  für  $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ .

Das charakteristische Polynom von  $A$  ist

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 9 - \lambda & -2 \\ -2 & 6 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 15\lambda + 50,$$

also hat  $A$  die Eigenwerte  $\lambda_1 = 10$  und  $\lambda_2 = 5$ . Die zugehörigen orthonormierten Eigenvektoren  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  und die entsprechende Matrix  $V$  sind

$$\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad V = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Das lineare Gleichungssystem  $-A\vec{p} = \vec{b}$  hat die eindeutige Lösung  $\vec{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Damit sind die neuen Koordinaten  $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wegen

$$q(\vec{p}) = \vec{p}^T A \vec{p} + 2\vec{b}^T \vec{p} + c = -\vec{p}^T \vec{b} + 2\vec{b}^T \vec{p} + c = \vec{b}^T \vec{p} + c = -34 + 24 = -10$$

erhalten wir als Gleichung der Quadrik in den neuen Koordinaten  $10y_1^2 + 5y_2^2 - 10 = 0$ , also  $y_1^2 + \frac{y_2^2}{2} - 1 = 0$ . Das ist eine Ellipse. Die Hauptachsen sind  $\vec{p} + \text{lin}\{\vec{v}_1\}$ ,  $\vec{p} + \text{lin}\{\vec{v}_2\}$  mit den Achsenabschnitten  $\alpha_1 = 1$  und  $\alpha_2 = \sqrt{2}$ .



## 19 Mehrdimensionale Differentialrechnung

Wir schreiben Vektoren  $\vec{x}$  im  $\mathbb{R}^n$  mit den Komponenten  $x_1, x_2, \dots, x_n$  als  $n$ -Tupel

$$(x_1, \dots, x_n) \text{ oder als Spaltenvektor } \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Für  $n = 2, 3$  schreiben wir häufig  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  bzw.  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ .

**19.1. Konvergenz von Folgen in  $\mathbb{R}^n$ :** Eine Folge  $(\vec{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$  von Vektoren in  $\mathbb{R}^n$  heißt *konvergent*, falls es einen Vektor  $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  gibt mit

$$\|\vec{x}_k - \vec{x}_0\| \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

Wir schreiben dann  $\lim_{k \rightarrow \infty} \vec{x}_k = \vec{x}_0$  oder  $\vec{x}_k \rightarrow \vec{x}_0$  ( $k \rightarrow \infty$ ).

**Bemerkung:** Wegen  $\|\vec{y}\|^2 = \sum_{j=1}^n |y_j|^2$  gilt für eine Folge  $(\vec{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{R}^n$  mit  $\vec{x}_k = ((\vec{x}_k)_1, \dots, (\vec{x}_k)_n)$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$  und für  $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ :

$$\vec{x}_k \rightarrow \vec{x}_0 \quad (k \rightarrow \infty) \iff \text{für alle } j = 1, \dots, n: (\vec{x}_k)_j \rightarrow (\vec{x}_0)_j \quad (k \rightarrow \infty).$$

**Beispiel:** Sei  $\vec{x}_k := \begin{pmatrix} e^{-k} \\ 1 - 1/k \end{pmatrix}$  für  $k \in \mathbb{N}$ . Dann gilt  $\vec{x}_k \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  für  $k \rightarrow \infty$ .

**19.2. Offene und abgeschlossene Mengen in  $\mathbb{R}^n$ :** Ist  $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  und  $r > 0$ , so heißt

$$K(\vec{x}_0, r) := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < r\}$$

*offene Kugel um  $\vec{x}_0$  mit Radius  $r$ .*

Eine Teilmenge  $Q \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt *offen*, falls es zu jedem  $\vec{x}_0 \in Q$  ein (von  $\vec{x}_0$  abhängiges)  $r > 0$  gibt mit  $K(\vec{x}_0, r) \subseteq Q$ .

**Beispiele:**  $\mathbb{R}^n$  ist offen. Offene Kugeln sind offen. Der Würfel  $(0, 1)^n$  ist offen.

*Beweis.* Wir zeigen, dass  $K(\vec{y}_0, s)$  offen ist. Dazu sei  $\vec{x}_0 \in K(\vec{y}_0, s)$ , dh  $\|\vec{x}_0 - \vec{y}_0\| < s$ . Wir setzen  $r := s - \|\vec{x}_0 - \vec{y}_0\|$  (Idee aus Skizze) und zeigen  $K(\vec{x}_0, r) \subseteq K(\vec{y}_0, s)$ . Dazu sei  $\vec{x} \in K(\vec{x}_0, r)$ , dh  $\|\vec{x} - \vec{x}_0\| < r$ . Dann gilt

$$\|\vec{x} - \vec{y}_0\| = \|\vec{x} - \vec{x}_0 + \vec{x}_0 - \vec{y}_0\| \leq \|\vec{x} - \vec{x}_0\| + \|\vec{x}_0 - \vec{y}_0\| < r + \|\vec{x}_0 - \vec{y}_0\| = s,$$

also  $\vec{x} \in K(\vec{y}_0, s)$ . □

**Definition:** Eine Teilmenge  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt *abgeschlossen*, falls  $\mathbb{R}^n \setminus A$  offen ist.

**Satz:** Eine Teilmenge  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  ist abgeschlossen genau dann, wenn für jede Folge  $(\vec{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $A$ , die in  $\mathbb{R}^n$  konvergiert, der Grenzwert  $\lim_k \vec{x}_k$  wieder zu  $A$  gehört.

Ende M  
15.05.17

*Beweis.* Sei  $A$  abgeschlossen, also  $\mathbb{R}^n \setminus A$  offen. Sei  $(\vec{x}_k)$  eine Folge in  $A$  mit  $\vec{x}_k \rightarrow \vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ . Wenn  $\vec{x}_0 \notin A$ , so finden wir  $\varepsilon > 0$  mit  $K(\vec{x}_0, \varepsilon) \cap A = \emptyset$ . Wegen  $x_k \in A$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  liegen dann aber in  $K(\vec{x}_0, \varepsilon)$  überhaupt keine  $x_k$  im Widerspruch zu  $\vec{x}_k \rightarrow \vec{x}_0$ . Also gilt  $\vec{x}_0 \in A$ .

Sei andererseits  $A$  nicht abgeschlossen, dh  $\mathbb{R}^n \setminus A$  nicht offen. Dann finden wir  $\vec{x}_0 \notin A$  so, dass für jedes  $r > 0$  gilt  $A \cap K(\vec{x}_0, r) \neq \emptyset$ . Wir finden dann zu jedem  $k \in \mathbb{N}$  ein  $\vec{x}_k \in A \cap K(\vec{x}_0, 1/k)$ . Es ist dann  $(\vec{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $A$  mit  $\vec{x}_k \rightarrow \vec{x}_0 \notin A$ .  $\square$

**Beispiele:**  $\mathbb{R}^n$  ist abgeschlossen. Endliche Mengen sind abgeschlossen. Abgeschlossene Kugeln

$$\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x} - \vec{x}_0\| \leq r\}$$

sind abgeschlossen.

**19.3. Stetigkeit von Funktionen:** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  nichtleer und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine Funktion. Dann gibt es Funktionen  $f_1, \dots, f_m : D \rightarrow \mathbb{R}$ , die *Komponentenfunktionen von  $f$*  mit

$$f(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_m(\vec{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix} \quad \text{für alle } \vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in D.$$

**Definition:** Die Funktion  $f$  heißt *stetig in  $\vec{x}_0 \in D$* , falls für alle Folgen  $(\vec{x}_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$  in  $D$  mit  $\vec{x}_k \rightarrow \vec{x}_0$  gilt:  $f(\vec{x}_k) \rightarrow f(\vec{x}_0)$ .

$f$  heißt *stetig in  $D$* , falls  $f$  in **jedem**  $\vec{x}_0 \in D$  stetig ist.

**Definition:** Ein  $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  heißt *Häufungspunkt von  $D$* , falls es eine Folge  $(\vec{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $D \setminus \{\vec{x}_0\}$  gibt mit  $\vec{x}_k \rightarrow \vec{x}_0$  für  $k \rightarrow \infty$ .

Sei  $\vec{c} \in \mathbb{R}^m$  und  $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  ein Häufungspunkt von  $D$ . Wir schreiben

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) = \vec{c},$$

falls  $f(\vec{x}_k) \rightarrow \vec{c}$  für jede Folge  $(\vec{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $D$ , die gegen  $\vec{x}_0$  konvergiert. In diesem Fall ist  $\vec{c}$  eindeutig bestimmt.

Wie in HM I gilt dann auch hier:  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  ist genau dann in  $D$  stetig, wenn für alle  $\vec{x}_0 \in D$ , die Häufungspunkt von  $D$  sind, gilt:

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0).$$

**Beispiel:** Sei  $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(x, y) = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} \\ \arctan(y/x) \end{pmatrix}$ .

Dann ist  $f$  in  $D$  stetig: sei  $(x_0, y_0) \in D$  und  $((x_k, y_k))_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $D$  mit  $x_k \rightarrow x_0$ ,  $y_k \rightarrow y_0$ . Dann gilt auch  $\sqrt{x_k^2 + y_k^2} \rightarrow \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$  und (wegen  $x_0 > 0$  und der Stetigkeit von  $\arctan$ )  $\arctan(y_k/x_k) \rightarrow \arctan(y_0/x_0)$ . Also  $f(x_k, y_k) \rightarrow f(x_0, y_0)$ .

**Bemerkung:** Wegen 19.1 ist  $f$  stetig in  $\vec{x}_0$  (bzw. in  $D$ ) genau dann, wenn jede Komponentenfunktion  $f_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ , stetig in  $\vec{x}_0$  (bzw. in  $D$ ) ist.

**Beispiele:** (1) Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = \begin{cases} xy/(x^2 + y^2) & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ .  $f$  ist in jedem Punkt  $(x, y) \neq (0, 0)$  stetig.  $f$  ist aber in  $(0, 0)$  nicht stetig, denn für  $x_k = y_k = 1/k$  gilt

$$f(x_k, y_k) = \frac{x_k^2}{2x_k^2} = \frac{1}{2} \not\rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

(2) Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = \begin{cases} x|y|^\beta(x^2 + y^2)^{-1} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ , wobei  $\beta > 1$ . Die Funktion ist in jedem Punkt  $(x, y) \neq (0, 0)$  stetig.  $f$  ist auch  $(0, 0)$  stetig, denn wegen  $|xy| \leq (x^2 + y^2)/2$  gilt

$$|f(x, y)| = \frac{|y|^{\beta-1}}{2} \frac{2|xy|}{x^2 + y^2} \leq |y|^{\beta-1}/2 \rightarrow 0 \quad (y \rightarrow 0).$$

(3) Sei  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  linear. Dann ist  $\phi$  stetig: Wegen  $\|\phi(\vec{x}) - \phi(\vec{y})\| = \|\phi(\vec{x} - \vec{y})\|$  reicht es, Stetigkeit in  $\vec{x}_0 = \vec{0}$  zu zeigen. Für  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  gilt

$$\|\phi(\vec{x})\| = \left\| \sum_{j=1}^n x_j \phi(\vec{e}_j) \right\| \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \|\phi(\vec{e}_j)\| \leq \|\vec{x}\| \sqrt{\sum_{j=1}^n \|\phi(\vec{e}_j)\|^2}.$$

Für  $\|\vec{x}\| \rightarrow 0$  gilt also  $\|\phi(\vec{x})\| \rightarrow 0$ .

(4) Kompositionen von stetigen Funktionen sind stetig. Die Addition  $+$  :  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  und Multiplikation  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  sind stetig, des weiteren Skalarprodukt, Matrix-Vektor-Produkt, Multiplikation von Matrizen, Determinante und Kreuzprodukt im  $\mathbb{R}^3$ . Auch die auf den regulären Matrizen erklärte Matrixinversion ist stetig (Cramersche Regel!).

**Satz:** (a)  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  ist stetig in  $\vec{x}_0 \in D$  genau dann, wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  so gibt, dass für alle  $\vec{x} \in D$  mit  $\|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta$  gilt:  $\|f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)\| < \varepsilon$ .

(b) Sei  $D$  offen. Die Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  ist stetig genau dann, wenn für jede offene Teilmenge  $Q$  von  $\mathbb{R}^m$  die Menge  $f^{-1}(Q)$  (das Urbild von  $Q$ ) offen ist.

**Beispiel:** Für jedes  $b \in \mathbb{R}$  ist die Menge  $M_b := \{(x, y) \neq (0, 0) : xy/(x^2 + y^2) < b\}$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^2$ , denn:  $D := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  ist offen,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) := xy/(x^2 + y^2)$ , ist stetig in  $D$ ,  $Q_b := (-\infty, b)$  ist offene Teilmenge von  $\mathbb{R}$ . Also ist  $f^{-1}(Q_b) = M_b$  nach dem Satz offen.

**19.4. Differenzierbarkeit von Funktionen**  $\mathbb{R} \supseteq I \rightarrow \mathbb{R}^n$ : Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $t \mapsto f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$  eine Funktion, wobei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall ist.

**Definition:** Die Funktion  $f$  heißt *differenzierbar in*  $t_0 \in I$ , falls es einen Vektor  $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$  gibt mit

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \vec{a}.$$

In diesem Fall heißt  $\vec{a}$  *Ableitung von  $f$  in  $t_0$* , geschrieben  $f'(t_0) := \vec{a}$ . Ableitungen nach einem reellen Parameter  $t$  schreibt man auch gerne mit Punkt, also  $\dot{f}(t_0)$ .

$f$  heißt *differenzierbar in  $I$* , falls  $f$  in **jedem**  $t_0 \in I$  differenzierbar ist, und  $f$  heißt *stetig differenzierbar in  $I$*  oder *eine  $C^1$ -Funktion*, falls  $\dot{f} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  zusätzlich stetig ist.

**Bemerkung:** Wegen 19.1 ist  $f$  differenzierbar in  $t_0$  [bzw. in  $I$ ] genau dann, wenn jede Komponentenfunktion  $f_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , differenzierbar in  $t_0$  [bzw. in  $I$ ] ist. Es gilt dann

$$\dot{f}(t_0) = \begin{pmatrix} \dot{f}_1(t_0) \\ \vdots \\ \dot{f}_n(t_0) \end{pmatrix}.$$

Außerdem ist  $\dot{f} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig genau dann, wenn alle  $\dot{f}_j : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $j = 1, \dots, n$ , stetig sind.

Ende Di  
16.05.17

**Beispiele:** Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$  gegeben durch

(1)  $x(t) = r \cos t$ ,  $y(t) = r \sin t$  mit  $r > 0$  und  $I = [0, 2\pi]$  (Kreisrand um  $(0, 0)$  mit Radius  $r$ ). Dann gilt  $\dot{x}(t) = -r \sin t$ ,  $\dot{y}(t) = r \cos t$ , und  $f$  ist  $C^1$ .

(2)  $x(t) = e^{-t} \cos t$ ,  $y(t) = e^{-t} \sin t$  mit  $I = [0, \infty)$  (*logarithmische Spirale*). Dann ist

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -e^{-t} \cos t - e^{-t} \sin t \\ \dot{y}(t) &= -e^{-t} \sin t + e^{-t} \cos t, \end{aligned}$$

und  $f$  ist  $C^1$ .

(3) Wir können das Differentialgleichungssystem  $\dot{x}(t) = 3x(t) + y(t)$ ,  $\dot{y}(t) = y(t) + 3x(t)$  mittels  $z(t) := \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$  schreiben als  $\dot{z}(t) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} z(t)$ .

**19.5. Raumkurven:** Eine *Raumkurve* ist eine stetig differenzierbare Abbildung  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , wobei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall ist.

Meist ist  $I$  von der Form  $[a, b]$ . Die Menge  $\gamma(I) \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt *Spur von  $\gamma$*  oder *Bild von  $\gamma$* .

Sind  $\gamma_1 : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $\gamma_2 : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  Kurven, so heißt  $\gamma_2$  eine *Umparametrisierung* von  $\gamma_1$ , falls es eine stetig differenzierbare und bijektive Abbildung  $\phi : I \rightarrow J$  gibt, für die  $\phi^{-1} : J \rightarrow I$  ebenfalls stetig differenzierbar ist und für die gilt

$$\gamma_1(t) = \gamma_2(\phi(t)), \quad t \in I.$$

Insbesondere haben  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  dieselbe Spur. Die Bemerkung in 19.4 und die Kettenregel aus HM I zeigen, dass dann außerdem gilt:

$$\dot{\gamma}_1(t) = \dot{\gamma}_2(\phi(t))\dot{\phi}(t), \quad t \in I.$$

Ist  $\phi$  (streng) monoton wachsend [bzw. fallend], heißt die Umparametrisierung *orientierungserhaltend* [bzw. *orientierungsumkehrend*].

Eine Kurve  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt *regulär*, falls  $\dot{\gamma}(t) \neq \vec{0}$  für jedes  $t \in I$  gilt. Damit ist auch jede Umparametrisierung regulär.

Eine Kurve  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt *geschlossen*, falls  $\gamma(a) = \gamma(b)$  gilt, und *doppelpunktfrei*, falls  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  injektiv ist.

**Beispiele:** (1) Seien  $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  gegeben durch  $\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$  und  $\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^2 \end{pmatrix}$ .

Dann ist  $\gamma_1$  regulär. Wegen  $\dot{\gamma}_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  ist  $\gamma_2$  nicht regulär. Insbesondere ist  $\gamma_2$  keine Umparametrisierung von  $\gamma_1$ , obwohl  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  dieselbe Spur haben.

(2) Sei  $\gamma_1 : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$  und  $\gamma_2 : [-\pi/2, 5\pi/2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \sin t \end{pmatrix}$ .

Dann haben  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  dieselbe Spur.  $\gamma_1$  ist regulär und  $\gamma_2$  ist nicht regulär.  $\gamma_2$  durchläuft das Bild von  $\gamma_2$  dreimal.

**19.6. Bogenlänge von Raumkurven:** Ist  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Raumkurve, so ist ihre *Länge* (oder *Bogenlänge*) gegeben durch

$$L(\gamma) := \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt.$$

**Bemerkung:** (a)  $L(\gamma)$  ändert sich nicht unter Umparametrisierung.

(b) Eine reguläre Kurve  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  lässt sich nach der Bogenlänge  $s$  parametrisieren:

$$\psi(t) := \int_a^t \|\dot{\gamma}(\tau)\| d\tau, \quad t \in [a, b],$$

ist streng monoton wachsend und stetig differenzierbar. Die Umkehrabbildung  $\phi : [0, L(\gamma)] \rightarrow [a, b]$  ist also ebenfalls  $C^1$  und  $\tilde{\gamma} := \gamma \circ \phi$  hat die Eigenschaft

$$\left\| \frac{d\tilde{\gamma}}{ds} \right\| = 1 \quad \text{für alle } s \in [0, L(\gamma)].$$

Diese Parametrisierung heißt auch *natürliche Parametrisierung*. Häufig behält man den Buchstaben  $\gamma$  bei und schreibt einfach  $\gamma(s)$ , Ableitungen nach der Bogenlänge  $s$  werden üblicherweise mit Strich geschrieben.

**Beispiele:** Die Abbildungen aus Beispiel 19.4(1) und (2) sind Raumkurven.

(1) Sei  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\gamma(t) = \begin{pmatrix} r \cos t \\ r \sin t \end{pmatrix}$ . Dann gilt (vgl. 19.4):

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \left\| \begin{pmatrix} -r \sin t \\ r \cos t \end{pmatrix} \right\| dt = \int_0^{2\pi} r dt = 2\pi r.$$

Das ist der Umfang eines Kreises mit Radius  $r$ . Die natürliche Parametrisierung ist wegen

$$s = \int_0^t \|\dot{\gamma}(\tau)\| d\tau = \int_0^t r d\tau = r t$$

hier gegeben durch  $\tilde{\gamma} : [0, 2\pi r] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\tilde{\gamma}(s) = \begin{pmatrix} r \cos(s/r) \\ r \sin(s/r) \end{pmatrix}$ .

(2) Für die logarithmische Spirale  $\gamma : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\gamma(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \cos t \\ e^{-t} \sin t \end{pmatrix}$  berechnen wir unter der Verwendung der Formel für  $\dot{\gamma}(t)$  aus Beispiel 19.4(2):

$$L(\gamma) = \int_0^\infty e^{-t} \sqrt{(\cos t + \sin t)^2 + (\cos t - \sin t)^2} dt = \sqrt{2} \int_0^\infty e^{-t} dt = \sqrt{2}.$$

Hier gilt für  $t \geq 0$ :

$$s = \int_0^t \|\dot{\gamma}(\tau)\| d\tau = \sqrt{2} \int_0^t e^{-\tau} d\tau = \sqrt{2}(1 - e^{-t}).$$

Auflösung nach  $t$  ergibt

$$t = -\ln \frac{\sqrt{2} - s}{\sqrt{2}} = \ln \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - s}.$$

Die natürliche Parametrisierung ist hier also

$$\tilde{\gamma} : [0, \sqrt{2}) \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \tilde{\gamma}(s) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}-s}{\sqrt{2}} \cos \ln \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-s} \\ \frac{\sqrt{2}-s}{\sqrt{2}} \sin \ln \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-s} \end{pmatrix}.$$

**19.7. Richtungsableitungen:** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine Funktion.

**Definition:**  $f$  heißt in  $\vec{x}_0 \in D$  in Richtung  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$  differenzierbar, falls der Limes

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{x}_0) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x}_0 + t\vec{v}) - f(\vec{x}_0)}{t}$$

in  $\mathbb{R}^m$  existiert.  $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{x}_0)$  heißt *Richtungsableitung von  $f$  in  $\vec{x}_0$  in Richtung  $\vec{v}$* .

**Bemerkung:** Da  $D$  offen ist, gibt es  $\delta > 0$  mit  $\vec{x}_0 + t\vec{v} \in D$  für  $t \in (-\delta, \delta)$ . Setzt man  $g(t) = f(\vec{x}_0 + t\vec{v})$ ,  $|t| < \delta$ , so ist  $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{x}_0) = \dot{g}(0)$  (vgl 19.4).

**19.8. Partielle Ableitungen:** In der Situation von 19.7 heißen Richtungsableitungen von  $f$  in Richtung der Einheitsvektoren  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$  *partielle Ableitungen von  $f$* , dh

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{x}_0) := \frac{\partial f}{\partial \vec{e}_k}(\vec{x}_0) \quad \text{partielle Ableitung von } f \text{ nach } x_k \text{ im Punkt } \vec{x}_0$$

für  $k = 1, \dots, m$ . Man schreibt oft auch nur  $f_{x_k}(\vec{x}_0)$ .

Ende Do

**Beispiele:** (1)  $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}$  ist offen. Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y, z) = e^{-x} \cos y + \ln z$ . In jedem Punkt  $(x, y, z) \in D$  existieren alle partiellen Ableitungen, und es gilt

18.05.17

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = -e^{-x} \cos y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = -e^{-x} \sin y, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \frac{1}{z}.$$

(2) Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ . Wir betrachten Richtungsableitungen im Punkt  $(0, 0)$ . Sei  $\vec{v} = (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  eine Richtung. Es gilt für  $t \neq 0$ :

$$\frac{f((0, 0) + t(\xi, \eta)) - f(0, 0)}{t} = \frac{f(t\xi, t\eta)}{t} = \frac{1}{t} \frac{\xi\eta}{\xi^2 + \eta^2}.$$

Der Limes für  $t \rightarrow 0$  existiert in  $\mathbb{R}$  genau dann, wenn  $\xi\eta = 0$  ist, dh genau dann, wenn  $\xi = 0$  oder  $\eta = 0$  ist. Also existiert  $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0, 0)$  genau dann, wenn  $\vec{v}$  ein Vielfaches von  $\vec{e}_1$  oder ein Vielfaches von  $\vec{e}_2$  ist.

(3) Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x|x|^{1/2}|y|^{3/2}}{x^2+y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ . Wir betrachten Richtungsableitungen im Punkt  $(0, 0)$ . Für  $(\xi, \eta) \neq (0, 0)$  gilt hier

$$\frac{f((0, 0) + t(\xi, \eta)) - f(0, 0)}{t} = \frac{f(t\xi, t\eta)}{t} = \frac{t^3}{t^3} \frac{\xi|\xi|^{1/2}|\eta|^{3/2}}{\xi^2 + \eta^2}$$

und wir erhalten für  $t \rightarrow 0$ :

$$\frac{\partial f}{\partial (\xi, \eta)}(0, 0) = \frac{\xi|\xi|^{1/2}|\eta|^{3/2}}{\xi^2 + \eta^2}$$

für jede Richtung  $(\xi, \eta) \neq (0, 0)$ .

**Übung:** Existiert in  $\vec{x}_0$  die Richtungsableitung von  $f$  in Richtung  $\vec{v}$  und ist  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , so gilt

$$\frac{\partial f}{\partial (\alpha\vec{v})}(\vec{x}_0) = \alpha \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{x}_0).$$

**19.9. Differenzierbarkeit:** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine Funktion, sowie  $\vec{x}_0 \in D$ . Idee der Differenzierbarkeit in 19.4 (und in HM I) war im Fall  $n = 1$ :

$$f(\vec{x}) \approx f(\vec{x}_0) + f'(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0) \quad \text{für } \vec{x} \text{ nahe } \vec{x}_0.$$

Dabei ist  $f'(\vec{x}_0) \in \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{m \times 1}$ , dh  $h \mapsto f'(\vec{x}_0)h$  ist eine lineare Abbildung  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ .

**Definition:**  $f$  heißt *differenzierbar* in  $\vec{x}_0 \in D$  (gelegentlich *total differenzierbar* in  $\vec{x}_0$ ), falls es eine lineare Abbildung  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  gibt mit

$$\frac{\|f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) - A(\vec{x} - \vec{x}_0)\|}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|} \rightarrow 0 \quad (\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0)$$

bzw.

$$\frac{\|f(\vec{x}_0 + \vec{h}) - f(\vec{x}_0) - A\vec{h}\|}{\|\vec{h}\|} \rightarrow 0 \quad (\vec{h} \rightarrow 0).$$

In diesem Fall ist die lineare Abbildung  $A$  eindeutig bestimmt und heißt *Ableitung von  $f$  in  $\vec{x}_0$* , Bezeichnung:  $f'(\vec{x}_0) := A$ . Andere Bezeichnungen:  $Df(\vec{x}_0)$ ,  $J_f(\vec{x}_0)$ , *Jacobimatrix*, *Funktionalmatrix*. Es ist  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ .

$f$  heißt *differenzierbar in  $D$* , falls  $f$  in **jedem**  $\vec{x}_0 \in D$  differenzierbar ist.

**Bemerkung:**  $f$  ist in  $\vec{x}_0$  differenzierbar mit Ableitung  $f'(\vec{x}_0) = A$  genau dann, wenn für Approximationsfehler  $\psi(\vec{h}) := f(\vec{x}_0 + \vec{h}) - f(\vec{x}_0) - A\vec{h}$  gilt  $\frac{\|\psi(\vec{h})\|}{\|\vec{h}\|} \rightarrow 0$  für  $\|\vec{h}\| \rightarrow 0$ . Man schreibt dafür auch

$$f(\vec{x}_0 + \vec{h}) = f(\vec{x}_0) + A\vec{h} + o(\|\vec{h}\|) \quad (\|\vec{h}\| \rightarrow 0),$$

wobei  $o(\|\vec{h}\|)$  hier für  $\psi(\vec{h})$  steht und bedeutet, dass  $\frac{\|\psi(\vec{h})\|}{\|\vec{h}\|} \rightarrow 0$  für  $\|\vec{h}\| \rightarrow 0$ .

**Satz:** (a) Ist  $f$  differenzierbar in  $\vec{x}_0$ , so ist  $f$  stetig in  $\vec{x}_0$ .

(b) Ist  $f$  differenzierbar in  $\vec{x}_0$ , so existieren in  $\vec{x}_0$  alle Richtungsableitungen von  $f$  und es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{x}_0) = f'(\vec{x}_0)\vec{v} \quad \text{für alle } \vec{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}.$$

Insbesondere gilt dann

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{x}_0) = f'(\vec{x}_0)\vec{e}_k \quad k\text{-te Spalte von } f'(\vec{x}_0), k = 1, \dots, n,$$

und

$$f'(\vec{x}_0) = \left( \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(\vec{x}_0) \right)_{j=1, k=1}^{m \quad n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{x}_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\vec{x}_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\vec{x}_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\vec{x}_0) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\vec{x}_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\vec{x}_0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \end{pmatrix}.$$



Im Fall  $m = 1$  ist also

$$f'(\vec{x}_0) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}_0) \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{x}_0) \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \right) \in \mathbb{R}^{1 \times n} \quad (\text{Zeilenvektor}).$$

*Beweis.* (a) Es gilt

$$f(\vec{x}_0 + \vec{h}) = f(\vec{x}_0) + f'(\vec{x}_0)\vec{h} + o(\|\vec{h}\|) \rightarrow f(\vec{x}_0)$$

für  $\vec{h} \rightarrow \vec{0}$ , da die lineare Abbildung  $f'(\vec{x}_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  stetig ist.

(b) Für kleine  $|t| \neq 0$  haben wir

$$\frac{f(\vec{x}_0 + t\vec{v}) - f(\vec{x}_0)}{t} = \frac{f'(\vec{x}_0)(t\vec{v}) + o(\|t\vec{v}\|)}{t} = f'(\vec{x}_0)\vec{v} + \frac{o(\|t\vec{v}\|)}{t} \rightarrow f'(\vec{x}_0)\vec{v}$$

für  $t \rightarrow 0$ . Der Rest folgt. □

**Beispiele:** (1) Die Funktion  $f$  aus Beispiel 19.8(2) ist **nicht** differenzierbar in  $(0, 0)$ , da in  $(0, 0)$  nicht alle Richtungsableitungen existieren.

(2) Die Funktion  $f$  aus Beispiel 19.8(3) ist **nicht** differenzierbar in  $(0, 0)$ : Es gilt  $f_x(0, 0) = 0 = f_y(0, 0)$ . Wäre  $f$  differenzierbar in  $(0, 0)$ , so wäre  $f'(0, 0) = (0 \ 0)$  und somit  $\frac{\partial f}{\partial(1,1)}(0, 0) = 0$ . Nach Beispiel 19.8(3) ist aber  $\frac{\partial f}{\partial(1,1)}(0, 0) = 1/2 \neq 0$ .

(3) Die Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x|x|^{1/2}y^2}{x^2+y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$  ist in  $(0, 0)$  differenzierbar: Zunächst berechnen wir  $f_x(0, 0) = 0$  und  $f_y(0, 0) = 0$ . Unser Kandidat für  $A \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$  ist also  $A := (0 \ 0)$ . Nun schätzen wir ab:

$$\frac{\|f(x, y) - f(0, 0) - A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\|}{\|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\|} = \frac{|f(x, y)|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{|x|^{3/2}y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \leq \frac{|x|^{3/2}}{(x^2 + y^2)^{1/2}} \leq |x|^{1/2} \rightarrow 0$$

für  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Somit ist  $f$  in  $(0, 0)$  differenzierbar, und es gilt  $f'(0, 0) = (0 \ 0)$ .

(4) Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $f(\vec{x}) = B\vec{x}$ , wobei  $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Für  $\vec{x}, \vec{h} \in \mathbb{R}^n$  gilt

$$f(\vec{x} + \vec{h}) - f(\vec{x}) = B(\vec{x} + \vec{h}) - B\vec{x} = B\vec{x} + B\vec{h} - B\vec{x} = B\vec{h}.$$

Wir wählen also  $A := B$  in der Definition und erhalten, dass  $f$  auf  $\mathbb{R}^n$  differenzierbar ist mit  $f'(\vec{x}) = B$  für jedes  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ . Insbesondere ist  $f' : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$  konstant.

(5) Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(\vec{x}) = \vec{x}^T B \vec{x}$ , wobei  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  symmetrisch sei. Dann gilt für  $\vec{x}, \vec{h} \in \mathbb{R}^n$ :

$$f(\vec{x} + \vec{h}) - f(\vec{x}) = (\vec{x} + \vec{h})^T B (\vec{x} + \vec{h}) - \vec{x}^T B \vec{x} = \vec{x}^T B \vec{h} + \underbrace{\vec{h}^T B \vec{x} + \vec{h}^T B \vec{h}}_{=\vec{x}^T B \vec{h}} = 2\vec{x}^T B \vec{h} + \vec{h}^T B \vec{h}.$$

Die Abbildung  $\vec{h} \mapsto 2\vec{x}^T B \vec{h}$  ist linear, und es gilt

$$|f(\vec{x} + \vec{h}) - f(\vec{x}) - 2\vec{x}^T B \vec{h}| = |\vec{h}^T B \vec{h}| \leq \max\{|\lambda| : \lambda \text{ EW von } B\} \cdot \|\vec{h}\|^2$$

(vergleiche Beweis in 18.9: Die Abschätzung ist klar, wenn  $B$  eine Diagonalmatrix ist. Ist  $B$  keine Diagonalmatrix, so diagonalisiere  $B$  durch eine orthogonale Matrix  $S$ , dh  $D = S^T B S$  bzw.  $B = S D S^T$ . Dann folgt:

$$\begin{aligned} |\vec{h}^T B \vec{h}| &= |\vec{h}^T S D S^T \vec{h}| = |(S^T \vec{h})^T D (S^T \vec{h})| \leq \max\{|\lambda| : \lambda \text{ EW von } D\} \cdot \|S^T \vec{h}\|^2 \\ &= \max\{|\lambda| : \lambda \text{ EW von } B\} \cdot \|\vec{h}\|^2 \end{aligned}$$

wegen  $\|S^T \vec{h}\| = \|\vec{h}\|$ .)

Ende M  
22.05.17

**19.10. Kriterium für Differenzierbarkeit, stetige Differenzierbarkeit:** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit Komponentenfunktionen  $f_1, \dots, f_m : D \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Definition:**  $f$  heißt in  $D$  *partiell differenzierbar*, falls alle partiellen Ableitungen  $\frac{\partial f_j}{\partial x_k}$  auf  $D$  existieren, und *stetig partiell differenzierbar* in  $D$ , falls die partiellen Ableitungen zusätzlich auf  $D$  stetig sind.

**Satz:** Sei  $f$  in  $D$  partiell differenzierbar und  $\vec{x}_0 \in D$ . Sind alle partiellen Ableitungen  $\frac{\partial f_j}{\partial x_k}$  stetig in  $\vec{x}_0$ , so ist  $f$  in  $\vec{x}_0$  differenzierbar.

**Definition:** Eine stetig partiell differenzierbare Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  heißt *stetig differenzierbar*, geschrieben  $f \in C^1(D, \mathbb{R}^m)$ .

**Beispiel:** Für die Funktion  $f$  aus Beispiel 19.8(2) gilt  $f_x = \frac{y(x^2+y^2)-2x^2y}{(x^2+y^2)^2}$  und  $f_y = \frac{x(x^2+y^2)-2xy^2}{(x^2+y^2)^2}$  auf  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ . Also ist  $f \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \mathbb{R})$ .

**19.11. Ableitungen höherer Ordnung:** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Existiert die partielle Ableitung  $\partial f / \partial x_k$ , so kann  $\partial f / \partial x_k : D \rightarrow \mathbb{R}$  wieder partiell differenzierbar sein. Man gelangt so gegebenenfalls zu *partiellen Ableitungen zweiter Ordnung*

$$\frac{\partial}{\partial x_l} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{x}_0).$$

Entsprechend werden (falls vorhanden) Ableitungen höherer Ordnung definiert.

Schreibweisen:  $\frac{\partial^3 f}{\partial^2 x \partial y} = f_{xxy}$  etc.

**Definition:** Sei  $k \in \mathbb{N}$ .  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *k-mal stetig (partiell) differenzierbar*, falls alle partiellen Ableitungen von  $f$  der Ordnung  $\leq k$  auf  $D$  existieren und dort stetig sind. Bezeichnung in diesem Fall:  $f \in C^k(D, \mathbb{R})$ .

$f : D \rightarrow \mathbb{R}^k$  heißt  $k$ -mal stetig differenzierbar,  $f \in C^k(D, \mathbb{R}^m)$ , falls für alle Komponentenfunktionen  $f_j$ ,  $j = 1, \dots, m$  gilt:  $f_j \in C^k(D, \mathbb{R})$ .

**Satz von Schwarz:** Ist  $k \in \mathbb{N}$  und  $f \in C^k(D, \mathbb{R})$ , so sind partielle Ableitungen einer Ordnung  $\leq k$  unabhängig von der Reihenfolge der Differentiationen.

**Beispiel:** Für die Funktion  $f$  aus Beispiel 19.8(2) existieren partielle Ableitungen beliebiger Ordnung in  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . Also ist  $f \in C^k(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \mathbb{R})$  für jedes  $k \in \mathbb{N}$ . Man schreibt dafür auch  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \mathbb{R})$ .

**19.12. Der Gradient:** Ist  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  partiell differenzierbar in  $D$ , so ist der *Gradient von  $f$  in  $\vec{x}_0 \in D$*  der Vektor der partiellen Ableitungen in  $\vec{x}_0$ , also

$$\text{grad } f(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}_0) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{x}_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \end{pmatrix}.$$

Man schreibt statt  $\text{grad } f(\vec{x}_0)$  auch  $\nabla f(\vec{x}_0)$  ("Nabla  $f$ "), wobei der Vektor

$$\nabla := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

als *Differentialoperator* verstanden wird, der auf die reellwertige Funktion  $f$  wirkt und daraus die vektorwertige Funktion  $\nabla f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  macht.

**Bemerkung (Zusammenhang mit der Ableitung):** Ist  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  in  $D$  differenzierbar, so gilt für  $\vec{x}_0 \in D$ :

$$\text{grad } f(\vec{x}_0) = f'(\vec{x}_0)^T \in \mathbb{R}^{n \times 1} = \mathbb{R}^n$$

(beachte  $f'(\vec{x}_0) \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ ).

**Satz:** Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  in  $\vec{x}_0 \in D$  differenzierbar und  $\text{grad } f(\vec{x}_0) \neq \vec{0}$ . Dann gilt für jeden Vektor  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$  mit  $\|\vec{v}\| = 1$ :

$$-\|\text{grad } f(\vec{x}_0)\| \leq \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{x}_0) \leq \|\text{grad } f(\vec{x}_0)\|.$$

Dabei gilt Gleichheit rechts genau dann, wenn  $\vec{v} = \text{grad } f(\vec{x}_0) / \|\text{grad } f(\vec{x}_0)\|$  ist (dh "der Gradient zeigt in Richtung des stärksten Anstiegs von  $f$ ").

Außerdem steht  $\text{grad } f(\vec{x}_0)$  senkrecht auf der *Niveaulinie*  $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0)\}$ .

*Beweis.* Es ist

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{x}_0) \stackrel{19.9}{=} f'(\vec{x}_0)\vec{v} = (\text{grad } f(\vec{x}_0))^T \vec{v} = (\text{grad } f(\vec{x}_0)) \cdot \vec{v}.$$

Nun verwendet man die Cauchy-Schwarz-Ungleichung. □

**19.13. Kettenregel:** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  differenzierbar in  $\vec{x}_0 \in D$ . Sei  $G \subseteq \mathbb{R}^m$  offen mit  $f(D) \subseteq G$ , und sei  $g : G \rightarrow \mathbb{R}^p$  differenzierbar in  $\vec{y}_0 := f(\vec{x}_0)$ . Dann ist  $g \circ f : D \rightarrow \mathbb{R}^p$  differenzierbar in  $\vec{x}_0$ , und es gilt:

$$\underbrace{(g \circ f)'(\vec{x}_0)}_{\in \mathbb{R}^{p \times n}} = \underbrace{g'(f(\vec{x}_0))}_{\in \mathbb{R}^{p \times m}} \underbrace{f'(\vec{x}_0)}_{\in \mathbb{R}^{m \times n}}$$

(“äußere Ableitung mal innere Ableitung”).

**Beispiele:** (1) Sei  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar und  $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  differenzierbar, wobei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall ist. Dann ist  $F \circ \phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto F(\phi(t))$  differenzierbar, und es gilt

$$(F \circ \phi)'(t) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_j}(\phi(t)) \phi'_j(t), \quad t \in I,$$

wobei  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  die Komponentenfunktionen von  $\phi$  sind. Ist  $n = 3$  und schreibt man  $F(x, y, z)$ ,  $\phi(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$  und  $\tilde{F}(t) = F(x(t), y(t), z(t))$ , so gilt

$$\frac{d\tilde{F}}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{dt}.$$

(2) Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar und  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , sowie  $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(\vec{x}) := f(B\vec{x})$ . Dann gilt

$$\underbrace{\nabla F(\vec{x})}_{\in \mathbb{R}^m} = F'(\vec{x})^T = (f'(B\vec{x})B)^T = B^T (f'(B\vec{x}))^T = \underbrace{B^T}_{\in \mathbb{R}^{m \times n}} \underbrace{(f'(B\vec{x}))^T}_{\in \mathbb{R}^n}.$$

**19.14. Der Umkehrsatz:** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $f \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$ ,  $\vec{x}_0 \in D$  und  $f'(\vec{x}_0) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  **regulär**. Dann gibt es offene Mengen  $U$  und  $V$  mit  $\vec{x}_0 \in U \subseteq D$ ,  $\vec{y}_0 := f(\vec{x}_0) \in V$  derart, dass  $f : U \rightarrow V$  bijektiv ist und die Umkehrabbildung  $f^{-1} : V \rightarrow U$  stetig differenzierbar ist mit

$$(f^{-1})'(\vec{y}) = \left( f'(f^{-1}(\vec{y})) \right)^{-1}, \quad \vec{y} \in V.$$

**Bemerkung:** Die Eigenschaft *regulär* ersetzt hier für  $n > 1$  die Bedingung  $f'(x_0) \neq 0$ , die im Fall  $n = 1$  vorausgesetzt werden muss. Die Formel für die Ableitung von  $f^{-1}$  erhält man auch aus der Kettenregel, wenn man die Gleichung

$$\vec{x} = f^{-1}(f(\vec{x})), \quad \vec{x} \in U,$$

nach  $\vec{x}$  ableitet. Das ergibt

$$I_n = (f^{-1})'(f(\vec{x}))f'(\vec{x}), \quad \text{also} \quad (f^{-1})'(f(\vec{x})) = (f'(\vec{x}))^{-1}$$

für jedes  $\vec{x} \in U$ .

**ACHTUNG:** Der Satz besagt nur, dass es **lokal** eine Umkehrfunktion zu  $f$  gibt. Auf ganz  $D$  muss dies nicht gelten!

**Beispiele:** (1) Sei  $D := (0, \infty) \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2$  und  $f(r, \varphi) := \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}$ . Dann ist  $D$  offen und  $f \in C^1(D, \mathbb{R}^2)$ , sowie

$$f'(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad r > 0, \varphi \in \mathbb{R}.$$

Wegen  $\det f'(r, \varphi) = r > 0$  ist  $f'(r, \varphi)$  für alle  $(r, \varphi) \in D$  regulär, und nach dem Umkehrsatz ist  $f$  lokal bijektiv.

Andererseits ist  $f$  die Polarkoordinatenabbildung und  $f(r, \varphi) = f(r, \varphi + 2\pi)$  für alle  $(r, \varphi) \in D$ , dh  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^2$  ist *nicht* injektiv. Genauer ist  $f(r, \varphi) = f(\tilde{r}, \tilde{\varphi})$  genau dann, wenn  $r = \tilde{r}$  und es ein  $k \in \mathbb{Z}$  gibt mit  $\varphi = \tilde{\varphi} + 2k\pi$ .

Es ist  $f(D) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , aber  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  ist **nicht** bijektiv. Hingegen ist etwa  $f : (0, \infty) \times (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus ([0, \infty) \times \{0\})$  bijektiv.

(2) Wir betrachten die komplexe Exponentialfunktion  $z \mapsto e^z$  für  $z = x + iy$  als Funktion  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , also  $F(x, y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y \\ e^x \sin y \end{pmatrix}$ .  $\mathbb{R}^2$  ist offen und  $F \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$  mit

$$F'(x, y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

und  $\det F'(x, y) = e^{2x} > 0$ . Also ist  $F'(x, y) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  für jedes  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  regulär und  $F$  ist nach dem Umkehrsatz lokal bijektiv.

Wir haben  $F = f \circ h$ , wobei  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow (0, \infty) \times \mathbb{R}$ ,  $h(x, y) = (e^x, y)$  bijektiv ist. Nach (1) ist also  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  *nicht* injektiv,  $F(x, y + 2\pi) = F(x, y)$  (was wir für die komplexe Exponentialfunktion ja schon wissen) und etwa  $F : \mathbb{R} \times (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus ((-\infty, 0] \times \{0\})$  bijektiv. Die Umkehrabbildung  $F^{-1} : \mathbb{R}^2 \setminus ((-\infty, 0] \times \{0\}) \rightarrow \mathbb{R} \times (-\pi, \pi)$  ist ein komplexer Logarithmus, und für  $(u, v) = (e^x \cos y, e^x \sin y) \notin (-\infty, 0] \times \{0\}$  mit  $y \in (-\pi, \pi)$  gilt

$$\begin{aligned} (F^{-1})'(u, v) &= (F'(x, y))^{-1} = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{u^2 + v^2} \begin{pmatrix} u & v \\ -v & u \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Beachtet man, dass für  $a + ib \in \mathbb{C}$  die Matrix für die lineare Abbildung  $z \mapsto (a + ib)z$ , wenn man sie als Abbildung  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  betrachtet, gerade  $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$  ist, so sieht man, dass die Ableitung von  $F^{-1}$  an der Stelle  $(u, v)$  gerade Multiplikation mit der komplexen Zahl  $\frac{u-iv}{u^2+v^2} = \frac{1}{u+iv}$  ist. Die Ableitung des komplexen Logarithmus an der Stelle  $z$  ist also  $\frac{1}{z}$ , wie im Reellen.

### 19.15. Der Satz über implizit definierte Funktionen:

**Motivation:** Die Gleichung  $y - x^2 = 0$  lässt sich eindeutig nach  $y$  auflösen durch  $y = x^2$ . Die Auflösung von  $x - y^2 = 0$  nach  $y$  ist hingegen global nicht mehr möglich.

Für gegebene  $(x_0, y_0)$  mit  $x_0 - y_0^2 = 0$  und  $y_0 > 0$  bzw.  $y_0 < 0$  ist diese Auflösung lokal noch möglich (durch  $y = \sqrt{x}$  bzw.  $y = -\sqrt{x}$  für  $(x, y)$  nahe  $(x_0, y_0)$ ). Jedoch ist in keiner Umgebung von  $(x_0, y_0) = (0, 0)$  eine Auflösung durch eine **Funktion** möglich.

**Satz:** Sei  $n > m$ ,  $p := n - m$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  stetig differenzierbar mit Komponentenfunktionen  $f_1, f_2, \dots, f_m : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Wir schreiben die Variablen in  $\mathbb{R}^n$  als  $(\vec{x}, \vec{y})$  mit  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$  und  $\vec{y} = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ , sowie

$$f'(\vec{x}, \vec{y}) = \left( \begin{array}{ccc|ccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{x}, \vec{y}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(\vec{x}, \vec{y}) & \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(\vec{x}, \vec{y}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m}(\vec{x}, \vec{y}) \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\vec{x}, \vec{y}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_p}(\vec{x}, \vec{y}) & \frac{\partial f_m}{\partial y_1}(\vec{x}, \vec{y}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m}(\vec{x}, \vec{y}) \end{array} \right) \in \mathbb{R}^{m \times n},$$

wobei wir den linken Block als  $\frac{\partial f}{\partial \vec{x}}(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{R}^{m \times p}$  und den rechten Block als  $\frac{\partial f}{\partial \vec{y}}(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{R}^{m \times m}$  bezeichnen.

Ist  $(\vec{x}_0, \vec{y}_0) \in D$  mit  $f(\vec{x}_0, \vec{y}_0) = \vec{0}$  und  $\frac{\partial f}{\partial \vec{y}}(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$  **regulär** (dh  $\det \frac{\partial f}{\partial \vec{y}}(\vec{x}_0, \vec{y}_0) \neq 0$ ), so gibt es offene Umgebungen  $U$  von  $\vec{x}_0$  und  $V$  von  $\vec{y}_0$ , sowie eine stetig differenzierbare Funktion  $g : U \rightarrow V$  derart, dass für alle  $\vec{x} \in U$  und  $\vec{y} \in V$  gilt:  $\det \frac{\partial f}{\partial \vec{y}}(\vec{x}, \vec{y}) \neq 0$  und

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{0} \iff \vec{y} = g(\vec{x}),$$

dh durch die Funktion  $g : U \rightarrow V$  ist (lokal um  $(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$ ) eine eindeutige Auflösung der Gleichung  $f(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{0}$  nach  $\vec{y}$  gegeben (bzw.  $\{(\vec{x}, \vec{y}) \in U \times V : f(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{0}\}$  ist Graph der Funktion  $g : U \rightarrow V$ ).

**Bemerkung:** Ableitungen von  $g$  kann man nach der Kettenregel aus

$$f(\vec{x}, g(\vec{x})) = \vec{0}, \quad \vec{x} \in U,$$

berechnen: es ist

$$0 = \frac{\partial f}{\partial \vec{x}}(\vec{x}, g(\vec{x})) + \frac{\partial f}{\partial \vec{y}}(\vec{x}, g(\vec{x}))g'(\vec{x}), \quad \vec{x} \in U,$$

also

$$g'(\vec{x}) = -\left(\frac{\partial f}{\partial \vec{y}}(\vec{x}, g(\vec{x}))\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial \vec{x}}(\vec{x}, g(\vec{x})), \quad \vec{x} \in U.$$

**Beispiele:** (1)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = y - x^2$ . Hier ist  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 1$  für alle  $x_0, y_0$  mit  $f(x_0, y_0) = 0$ .

(2)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = x - y^2$ . Hier ist  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = -2y_0$ .

(3) Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \sinh(yz) + (z - x)^2 - 1 \\ \cos^2(\pi y) + z - x^2/2 \end{pmatrix}$  und  $(x_0, y_0, z_0) = (2, 0, 1)$ .

Hier ist  $n = 3$ ,  $p = 1$ ,  $m = 2$ , und es gilt

Ende M  
29.05.17

$$\frac{\partial f}{\partial (y, z)}(2, 0, 1) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Da diese Matrix regulär ist und  $f(2, 0, 1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  gilt, ist in einer Umgebung von  $(2, 0, 1)$  eine Auflösung des Gleichungssystems  $f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  nach  $y$  und  $z$  (jeweils als Funktion von  $x$ ) möglich. Dh es gibt Funktionen  $g_1, g_2 : U \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert auf einer offenen Umgebung  $U$  von 2, und eine offenen Umgebung  $V \subseteq \mathbb{R}^2$  von  $(0, 1)$  derart, dass für alle  $(x, y, z) \in U \times V$  gilt:

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix}.$$

Die Funktion  $g = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$  ist dabei  $C^1$  mit

$$g'(2) = \begin{pmatrix} g'_1(2) \\ g'_2(2) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \frac{\partial f}{\partial x}(2, 0, 1) = -\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(4) Man kann den Satz verwenden, um zu Parameterdarstellungen von implizit gegebenen Flächen im  $\mathbb{R}^3$  zu kommen. Wir betrachten als Beispiel die Gleichung  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  der Oberfläche der Einheitskugel (dh der Einheitssphäre)  $S^2$ . Hier ist  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ , und  $n = 3$ ,  $p = 2$ ,  $m = 1$ . Es gilt

$$f'(x, y, z) = (2x \ 2y \ 2z) \quad \text{für alle } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Haben wir also einen Punkt  $(x_0, y_0, z_0) \in S^2$  mit  $z_0 \neq 0$ , so finden wir offene Umgebungen  $U$  von  $(x_0, y_0)$ ,  $V$  von  $z_0$  und auf  $U$  eine auflösende Funktion  $g(x, y)$  derart, dass für  $(x, y, z) \in U \times V$  gilt

$$(x, y, z) \in S^2 \iff z = g(x, y).$$

Hier kann man  $U$ ,  $V$  und  $g$  konkret angeben:  $g(x, y) = \text{sgn}(z_0) \sqrt{1 - x^2 - y^2}$  auf  $U := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$  und z.B.  $V = \text{sgn}(z_0) \cdot (0, \infty)$ . In Punkten  $(x_0, y_0, z_0) \in S^2$  mit  $z_0 = 0$  ist so eine lokale Auflösung nach  $z$  nicht möglich. Man kann dann aber zumindest nach einer der Variablen  $x$  oder  $y$  lokal auflösen.

**Als Bonus:**

**Beweisidee** 19.15  $\Rightarrow$  19.14: Setze  $F(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{y} - f(\vec{x})$ . Es ist  $\frac{\partial F}{\partial \vec{x}}(\vec{x}, \vec{y}) = -f'(\vec{x})$  regulär. Also kann man  $\vec{y} - f(\vec{x}) = \vec{0}$  lokal nach  $\vec{x}$  auflösen. Die Auflösung ist  $f^{-1}$ .

**Beweisidee** 19.14  $\Rightarrow$  19.15: Setze  $F(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{pmatrix} \vec{x} \\ f(\vec{x}, \vec{y}) \end{pmatrix}$ . Dann ist  $F'(\vec{x}_0, \vec{y}_0) = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} & \frac{\partial f}{\partial \vec{y}} \end{pmatrix}(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$ . Wegen  $\det F'(\vec{x}_0, \vec{y}_0) = \det \frac{\partial f}{\partial \vec{y}}(\vec{x}_0, \vec{y}_0) \neq 0$  ist  $F'(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$  regulär. Setze  $g(\vec{x}) :=$  zweite Komponente von  $F^{-1}(\vec{x}, \vec{0})$ . Dann gilt:

$$\vec{y} = g(\vec{x}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{x} \\ g(\vec{x}) \end{pmatrix} = F^{-1}(\vec{x}, \vec{0}) \Leftrightarrow F(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{0} \end{pmatrix} \Leftrightarrow f(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{0}.$$

**19.16. Der Satz von Taylor:** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $l \in \mathbb{N}_0$ ,  $f \in C^{l+1}(D, \mathbb{R})$  und  $\vec{x}_0 \in D$ .

Für  $\vec{h} = (h_1, h_2, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$  schreiben wir

$$\begin{aligned} \vec{h} \cdot \nabla &:= h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n} = \sum_{j=1}^n h_j \frac{\partial}{\partial x_j}, \\ (\vec{h} \cdot \nabla) f(\vec{x}_0) &:= h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}_0) + \dots + h_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}_0) = \sum_{j=1}^n h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{x}_0) = \text{grad } f(\vec{x}_0) \cdot \vec{h} \end{aligned}$$

und

$$(\vec{h} \cdot \nabla)^2 := \left( \sum_{j=1}^n h_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right)^2 = \sum_{j,k=1}^n h_j h_k \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k}, \quad (\vec{h} \cdot \nabla)^2 f(\vec{x}_0) := \sum_{j,k=1}^n h_j h_k \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(\vec{x}_0).$$

Entsprechend definiert man für  $k = 1, 2, \dots, l+1$ :

$$(\vec{h} \cdot \nabla)^k := \left( \sum_{j=1}^n h_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right)^k, \quad (\vec{h} \cdot \nabla)^k f(\vec{x}_0) := \sum_{j_1, j_2, \dots, j_k=1}^n h_{j_1} h_{j_2} \dots h_{j_k} \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \dots \partial x_{j_k}}(\vec{x}_0).$$

**Beispiel:** Für  $n = 2$ ,  $\vec{h} = (h_1, h_2)$  und  $f \in C^2(D, \mathbb{R})$  hat man also

$$(\vec{h} \cdot \nabla)^2 f = h_1^2 f_{xx} + h_1 h_2 f_{xy} + h_2 h_1 f_{yx} + h_2^2 f_{yy} = h_1^2 f_{xx} + 2h_1 h_2 f_{xy} + h_2^2 f_{yy}.$$

Zur allgemeinen Betrachtung von  $(\vec{h} \cdot \nabla)^2 f(\vec{x}_0)$  definieren wir die *Hesse-Matrix von f in  $\vec{x}_0$* :

$$H_f(\vec{x}_0) := \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1}(\vec{x}_0) & \dots & f_{x_1 x_n}(\vec{x}_0) \\ f_{x_2 x_1}(\vec{x}_0) & \dots & f_{x_2 x_n}(\vec{x}_0) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{x_n x_1}(\vec{x}_0) & \dots & f_{x_n x_n}(\vec{x}_0) \end{pmatrix} = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(\vec{x}_0) \right)_{j,k=1}^n.$$

Nach dem Satz von Schwarz ist  $H_f(\vec{x}_0)$  symmetrisch, wenn  $f \in C^2(D, \mathbb{R})$ . Damit ist

$$(\vec{h} \cdot \nabla)^2 f(\vec{x}_0) = \vec{h}^T H_f(\vec{x}_0) \vec{h}.$$



Für  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$  bezeichne

$$S[\vec{x}, \vec{y}] = \{\vec{x} + t(\vec{y} - \vec{x}) : t \in [0, 1]\}$$

die *Verbindungsstrecke* von  $\vec{x}$  und  $\vec{y}$ .

**Satz von Taylor:** Unter den obigen Voraussetzungen seien  $\vec{x}_0 \in D$  und  $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$  mit  $S[\vec{x}_0, \vec{x}_0 + \vec{h}] \subseteq D$ . Dann gibt es ein  $\vec{\xi} \in S[\vec{x}_0, \vec{x}_0 + \vec{h}]$  mit

$$f(\vec{x}_0 + \vec{h}) = f(\vec{x}_0) + \frac{1}{1!}(\vec{h} \cdot \nabla)f(\vec{x}_0) + \frac{1}{2!}(\vec{h} \cdot \nabla)^2 f(\vec{x}_0) + \dots + \frac{1}{l!}(\vec{h} \cdot \nabla)^l f(\vec{x}_0) + \frac{1}{(l+1)!}(\vec{h} \cdot \nabla)^{l+1} f(\vec{\xi}).$$

**Bemerkung:** (a) Für  $l = 0$  erhält man einen mehrdimensionalen Mittelwertsatz.

(b) Der Ausdruck

$$T_{l, \vec{x}_0}(\vec{h}) := f(\vec{x}_0) + \sum_{k=1}^l \frac{(\vec{h} \cdot \nabla)^k f(\vec{x}_0)}{k!}$$

heißt *l-tes Taylorpolynom von f in  $\vec{x}_0$* . Statt  $\vec{h}$  schreibt man auch  $\vec{x} - \vec{x}_0$ .

(c) Für  $l = 1$ ,  $f \in C^2(D, \mathbb{R})$  erhalten wir, wenn  $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$  mit  $S[\vec{x}_0, \vec{x}_0 + \vec{h}] \subseteq D$ :

$$f(\vec{x}_0 + \vec{h}) = f(\vec{x}_0) + \text{grad } f(\vec{x}_0) \cdot \vec{h} + \frac{1}{2} \vec{h}^T H_f(\vec{\xi}) \vec{h}$$

für ein  $\vec{\xi} \in S[\vec{x}_0, \vec{x}_0 + \vec{h}] \subseteq D$ . Schreibt man  $\vec{x} - \vec{x}_0$  statt  $\vec{h}$ , so ist  $\vec{x}_0 + \vec{h} = \vec{x}$ .

**Beispiel:** Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = e^{xe^y - 2}$  und  $(x_0, y_0) = (2, 0)$ . Dann ist  $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  und  $f_x = e^y f$ ,  $f_y = xe^y f$ , sowie  $f_{xx} = e^{2y} f$ ,  $f_{xy} = e^y (f + f_y) = (e^y + xe^{2y})f$ ,  $f_{yy} = xe^y (f + f_y) = (xe^y + x^2 e^{2y})f$ . Wir erhalten

$$f(2, 0) = 1, f_x(2, 0) = 1, f_y(2, 0) = 2, f_{xx}(2, 0) = 1, f_{xy}(2, 0) = 3, f_{yy}(2, 0) = 6,$$

und damit ist das zweite Taylorpolynom von  $f$  in  $(2, 0)$  gegeben durch

$$T_{2, (2,0)}(h_1, h_2) = 1 + 1 \cdot h_1 + 2h_2 + \frac{1}{2}h_1^2 + 3h_1h_2 + 3h_2^2$$

bzw., wenn man  $h_1 = x - 2$  und  $h_2 = y$  berücksichtigt, durch

$$1 + (x - 2) + 2y + \frac{1}{2}(x - 2)^2 + 3(x - 2)y + 3y^2.$$

Ende Di  
30.05.17

**19.17. Lokale Extremstellen:** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Definition:**  $f$  hat in  $\vec{x}_0 \in D$  ein *lokales Maximum* [bzw. *lokales Minimum*], falls es ein  $\delta > 0$  so gibt, dass  $K(\vec{x}_0, \delta) \subseteq D$  und  $f(\vec{x}) \leq f(\vec{x}_0)$  [bzw.  $f(\vec{x}) \geq f(\vec{x}_0)$ ] für alle  $\vec{x} \in K(\vec{x}_0, \delta)$  gilt.

Ein *lokales Extremum* ist ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum.

**Satz über lokale Extremstellen:** Sei  $\vec{x}_0 \in D$ .

(a) Hat  $f$  in  $\vec{x}_0$  ein lokales Extremum und ist  $f$  in  $\vec{x}_0$  partiell differenzierbar, so ist  $\text{grad } f(\vec{x}_0) = \vec{0}$ .

(b) Sei  $f \in C^2(D, \mathbb{R})$  und  $\text{grad } f(\vec{x}_0) = \vec{0}$ . Dann gilt:

- (i) Ist  $H_f(\vec{x}_0)$  positiv definit, so hat  $f$  in  $\vec{x}_0$  ein lokales Minimum.
- (ii) Ist  $H_f(\vec{x}_0)$  negativ definit, so hat  $f$  in  $\vec{x}_0$  ein lokales Maximum.
- (iii) Ist  $H_f(\vec{x}_0)$  indefinit, so hat  $f$  in  $\vec{x}_0$  **kein** lokales Extremum, sondern einen *Sattelpunkt*.

**Beispiel für einen Sattelpunkt:** Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = xy$ . Dann ist  $\text{grad } f(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$  und  $\text{grad } f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  gilt nur für  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ . Für die Hessematrix gilt  $H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Diese Matrix hat eine negative Determinante und ist daher indefinit (siehe 18.9). Somit hat  $f$  in  $(0, 0)$  einen Sattelpunkt. Für  $(x, y)$  im ersten oder dritten Quadranten ist  $f(x, y) = xy > 0$ , für  $(x, y)$  im zweiten oder vierten Quadranten ist  $f(x, y) = xy < 0$ .

**Bemerkung:** Trifft in (b) keiner der Fälle (i), (ii) oder (iii) zu, so ist  $H_f(\vec{x}_0)$  (positiv oder negativ) **semidefinit** (vgl. 18.9), und es ist keine allgemeine Aussage möglich.

Nullstellen des Gradienten heißen auch *kritische Punkte*.

Im Beweis von (b) verwendet man Bemerkung 19.16(c), dh

$$f(\vec{x}_0 + \vec{h}) = f(\vec{x}_0) + \vec{h}^T H_f(\vec{\xi}) \vec{h},$$

und die Tatsache, dass man wegen  $f \in C^2$  ein  $\delta > 0$  so findet, dass  $H_f(\vec{\xi})$  für  $\vec{\xi} \in K(\vec{x}_0, \delta)$  dieselben Definitheitseigenschaften wie  $H_f(\vec{x}_0)$  hat.

Alternativ kann man für  $\vec{h} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$  und kleine  $t \in \mathbb{R}$  definieren  $g(t) := f(\vec{x}_0 + t\vec{h})$ . Dann ist  $g \in C^2$  mit  $g'(t) = \text{grad } f(\vec{x}_0 + t\vec{h}) \cdot \vec{h}$ ,  $g'(0) = 0$  und

$$g''(0) = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right)'(\vec{x}_0) \vec{h} h_j = \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(\vec{x}_0) h_j h_k = \vec{h}^T H_f(\vec{x}_0) \vec{h}.$$

Verwende nun HM I.

**Beispiel:**  $D = \mathbb{R}^2$ ,  $f(x, y) = x^3 - 12xy + 8y^3$ . Hier gilt

$$f_x = 3x^2 - 12y, \quad f_y = -12x + 24y^2.$$

Wir formen äquivalent um:

$$\begin{aligned} \text{grad } f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &\iff \begin{aligned} 3x^2 - 12y &= 0 \\ -12x + 24y^2 &= 0 \end{aligned} \iff \begin{aligned} x^2 &= 4y \\ 2y^2 &= x \end{aligned} \iff \begin{aligned} y^4 &= y \\ 2y^2 &= x \end{aligned} \iff \\ &\iff \begin{aligned} y &\in \{0, 1\} \\ 2y^2 &= x \end{aligned} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Wir berechnen die Hessematrix

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & -12 \\ -12 & 48y \end{pmatrix}.$$

Es ist

$$\det H_f(0, 0) = \det \begin{pmatrix} 0 & -12 \\ -12 & 0 \end{pmatrix} = -24 < 0,$$

also ist  $H_f(0, 0)$  indefinit und  $f$  hat in  $(0, 0)$  **kein** lokales Extremum sondern einen Sattelpunkt. Weiter ist

$$H_f(2, 1) = \begin{pmatrix} 12 & -12 \\ -12 & 48 \end{pmatrix}$$

wegen  $\det H_f(2, 1) > 0$  und  $12 > 0$  positiv definit (siehe 18.9). Also hat  $f$  in  $(2, 1)$  ein lokales Minimum.

**19.18. Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen:** Sei  $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $f \in C^1(D, \mathbb{R})$ ,  $p \in \mathbb{N}$  mit  $p < n$  und  $h \in C^1(D, \mathbb{R}^p)$  mit Komponentenfunktionen  $h_1, h_2, \dots, h_p : D \rightarrow \mathbb{R}$ , sowie  $S := \{\vec{x} \in D : h(\vec{x}) = \vec{0}\}$ .

**Definition:** Man sagt " $f$  hat in  $\vec{x}_0 \in D$  ein lokales Maximum [Minimum] unter der Nebenbedingung  $h = \vec{0}$ ", falls  $\vec{x}_0 \in S$  gilt und es ein  $\delta > 0$  gibt mit  $K(\vec{x}_0, \delta) \subseteq D$  und  $f(\vec{x}) \leq f(\vec{x}_0)$  [bzw.  $f(\vec{x}) \geq f(\vec{x}_0)$ ] für alle  $\vec{x} \in K(\vec{x}_0, \delta) \cap S$ .

**Zur Existenz:** Eine Menge  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt *kompakt*, falls jede Folge in  $K$  eine Teilfolge enthält, die gegen ein  $\vec{x}_0 \in K$  konvergiert. Man kann zeigen:

$$K \text{ ist kompakt} \iff K \text{ ist abgeschlossen und beschränkt.}$$

Dabei heißt  $K$  *beschränkt*, falls es ein  $M \in \mathbb{R}$  gibt mit  $\|\vec{x}\| \leq M$  für alle  $\vec{x} \in K$ .

**Satz:** Ist  $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^n$  kompakt und  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, so ist  $f(K)$  kompakt und es gibt  $\vec{a}, \vec{b} \in K$  mit

$$f(\vec{a}) \leq f(\vec{x}) \leq f(\vec{b}) \quad \text{für alle } \vec{x} \in K.$$

**Beispiel:** Seien  $n = 3$ ,  $p = 2$  und  $D = \mathbb{R}^3$ , sowie

$$f(x, y, z) = x + y + z, \quad h(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - 2 \\ x + z - 1 \end{pmatrix}.$$

Dann sind  $f$ ,  $h$  stetig differenzierbar auf  $D$  und

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 2, x + z = 1\}.$$

Die Menge  $S$  ist abgeschlossen: für eine Folge  $(x_k, y_k, z_k)$  in  $S$  mit  $(x_k, y_k, z_k) \rightarrow (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$  gilt  $(x_0, y_0, z_0) \in S$ .

Die Menge  $S$  ist beschränkt: Sind  $(x, y, z) \in S$ , so gilt  $x^2 + y^2 = 2$  und somit  $|x| \leq \sqrt{2}$ . Also ist  $|z| = |1 - x| \leq 1 + |x| \leq 1 + \sqrt{2}$  und  $\|(x, y, z)\| \leq \sqrt{2 + (1 + \sqrt{2})^2} =: M$ .

Also ist  $S$  kompakt, und nach dem Satz gibt es  $\vec{a}, \vec{b} \in S$  mit  $f(\vec{a}) \leq f(\vec{v}) \leq f(\vec{b})$  für alle  $\vec{v} \in S$ .

**19.19. Multiplikatorenregel von Lagrange:** Seien  $n$ ,  $D$ ,  $n$ ,  $f$ ,  $p$ ,  $h$  und  $S$  wie in 19.18. Definiere die Funktion  $F : D \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$F(\vec{x}, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) := f(\vec{x}) + \lambda_1 h_1(\vec{x}) + \lambda_2 h_2(\vec{x}) + \dots + \lambda_p h_p(\vec{x})$$

für  $\vec{x} \in D$  und  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ .

Ende Do  
01.06.17

**Satz:** Hat  $f$  in  $\vec{x}_0 \in D$  ein lokales Extremum unter der Nebenbedingung  $h = \vec{0}$  und gilt

$$\text{Rang} \underbrace{h'(\vec{x}_0)}_{\in \mathbb{R}^{p \times n}} = p \quad [h'(\vec{x}_0) \text{ hat vollen, dh maximalen, Rang}],$$

so gibt es  $\lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_p^0 \in \mathbb{R}$  (Lagrangemultiplikatoren) mit

$$\text{grad} F(\vec{x}_0, \lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_p^0) = \vec{0}.$$

**Bemerkung:** (a) Beachte, dass die Zeilen von  $h'(\vec{x}_0) \in \mathbb{R}^{p \times n}$  gerade  $\text{grad} h_1(\vec{x}_0)^T, \text{grad} h_2(\vec{x}_0)^T, \dots, \text{grad} h_p(\vec{x}_0)^T$  sind. Die Voraussetzung an den Rang von  $h'(\vec{x}_0)$  bedeutet also, dass  $\text{grad} h_1(\vec{x}_0), \text{grad} h_2(\vec{x}_0), \dots, \text{grad} h_p(\vec{x}_0)$  linear unabhängig sind.

(b) Schreibt man  $\vec{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ , so ist die Bedingung  $\text{grad} F = \vec{0}$  ein Gleichungssystem mit  $n + p$  Gleichungen für die  $n + p$  Unbekannten  $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_p^0$ , nämlich

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{x}_0) + \sum_{j=1}^p \lambda_j^0 \frac{\partial h_j}{\partial x_k}(\vec{x}_0), \quad k = 1, 2, \dots, n$$

(Gleichungen aus  $\frac{\partial F}{\partial x_k} = 0$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ ) und

$$h_j(\vec{x}_0) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, p$$

(Gleichungen aus  $\frac{\partial F}{\partial \lambda_j} = 0$ , diese sind gleichbedeutend mit  $\vec{x}_0 \in S$ ).

(c) Zur Bestimmung der Extrema versucht man, dieses Gleichungssystem zu lösen. Kann man den Satz anwenden (dh sind die Voraussetzungen erfüllt), so findet man die gesuchten Extremstellen unter den Lösungen dieses Gleichungssystems. Kann man den Satz **nicht** anwenden (weil es z.B. lokale Extremstellen  $\vec{x}_0$  gibt, in denen  $h'(\vec{x}_0)$  nicht vollen Rang hat), so ist dies **nicht sicher!**

**Beispiel** (Fortsetzung des Beispiels aus 19.18): Wir wissen schon, dass es  $\vec{a}, \vec{b} \in S$  gibt mit:  $f$  hat in  $\vec{a}$  [bzw. in  $\vec{b}$ ] ein globales Minimum [bzw. Maximum] unter der Nebenbedingung  $h = \vec{0}$ .

Wir haben

$$h'(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

und  $\text{Rang } h'(x, y, z) < 2$  ist äquivalent zu  $x = y = 0$ , was jedoch für  $(x, y, z) \in S$  wegen  $x^2 + y^2 = 2$  nicht vorkommt. Also ist

$$\text{Rang } h'(x, y, z) = 2 \quad \text{für alle } (x, y, z) \in S,$$

und die Voraussetzungen des Satzes sind insbesondere in  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  erfüllt. Hier ist

$$F(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = x + y + z + \lambda_1(x^2 + y^2 - 2) + \lambda_2(x + z - 1)$$

und

$$F_x = 1 + 2\lambda_1 x + \lambda_2, \quad F_y = 1 + 2\lambda_1 y, \quad F_z = 1 + \lambda_2, \quad F_{\lambda_1} = x^2 + y^2 - 2, \quad F_{\lambda_2} = x + z - 1.$$

Aus  $\text{grad } F = \vec{0}$  erhält man also  $\lambda_2 = -1$ ,  $\lambda_1 \neq 0$ ,  $x = 0$ ,  $z = 1$  und  $y = \pm\sqrt{2}$  (der genaue Wert von  $\lambda_1$  ist nicht wichtig).

Wegen  $f(0, \pm\sqrt{2}, 1) = 1 \pm \sqrt{2}$  ist  $\vec{a} = (0, -\sqrt{2}, 1)$  die Minimal- und  $\vec{b} = (0, \sqrt{2}, 1)$  die Maximalstelle. Der maximale Wert von  $f$  auf  $S$  ist  $f(\vec{b}) = 1 + \sqrt{2}$  und der minimale Wert von  $f$  auf  $S$  ist  $f(\vec{a}) = 1 - \sqrt{2}$ .

**Erläuterung zum Satz (als Bonus):** Wir kehren zur allgemeinen Situation zurück, dh  $n$ ,  $D$ ,  $f$ ,  $p$  und  $h$  wie in 19.18,  $S = \{\vec{x} \in D : h(\vec{x}) = \vec{0}\}$ . Weiter sei  $\vec{x}_0 \in S$  mit

$$\text{Rang } h'(\vec{x}_0) = p.$$

Wir zeigen, wie man  $S$  lokal in der Nähe von  $\vec{x}_0$  parametrisieren kann. Wir setzen  $q := n - p$  und finden  $p$  linear unabhängige Spalten von  $h'(\vec{x}_0) \in \mathbb{R}^{p \times n}$ . Dies seien o.B.d.A. die letzten  $p$  Spalten. Wir schreiben  $\vec{x} = (\vec{y}, \vec{z})$  mit  $\vec{y} = (x_1, \dots, x_q) \in \mathbb{R}^q$  und  $\vec{z} = (x_{q+1}, \dots, x_{q+p}) \in \mathbb{R}^p$ ,

sowie entsprechend  $\vec{x}_0 = (\vec{y}_0, \vec{z}_0)$ . Dann ist  $\frac{\partial h}{\partial \vec{z}}(\vec{x}_0) \in \mathbb{R}^{p \times p}$  regulär (da die Matrix Rang  $p$  hat), und nach 19.15 gibt es offene Umgebungen  $U \subseteq \mathbb{R}^q$  von  $\vec{y}_0$ ,  $V \subseteq \mathbb{R}^p$  von  $\vec{z}_0$  und eine  $C^1$ -Funktion  $g : U \rightarrow V$  mit  $g(\vec{y}_0) = \vec{z}_0$  so, dass für alle  $(\vec{y}, \vec{z}) \in U \times V$  gilt:

$$h(\vec{y}, \vec{z}) = \vec{0} \iff \vec{z} = g(\vec{y}).$$

Die Funktion  $U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\vec{y} \mapsto \begin{pmatrix} \vec{y} \\ g(\vec{y}) \end{pmatrix}$  ist also eine Parametrisierung von  $S \cap (U \times V)$ . Außerdem haben wir

$$g'(\vec{y}_0) = -\left(\frac{\partial h}{\partial \vec{z}}(\vec{x}_0)\right)^{-1} \frac{\partial h}{\partial \vec{y}}(\vec{x}_0).$$

Hat nun  $f$  zusätzlich in  $\vec{x}_0 = (\vec{y}_0, g(\vec{y}_0))$  eine lokale Extremstelle unter der Nebenbedingung  $h = \vec{0}$ , so hat die Funktion  $U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\vec{y} \mapsto f(\vec{y}, g(\vec{y}))$ , in  $\vec{y}_0$  eine lokale Extremstelle. Nach Satz 19.17(a) und der Kettenregel ist also

$$\vec{0} = \frac{\partial f}{\partial \vec{y}}(\vec{x}_0) + \frac{\partial f}{\partial \vec{z}}(\vec{x}_0)g'(\vec{y}_0) = \frac{\partial f}{\partial \vec{y}}(\vec{x}_0) - \frac{\partial f}{\partial \vec{z}}(\vec{x}_0)\left(\frac{\partial h}{\partial \vec{z}}(\vec{x}_0)\right)^{-1} \frac{\partial h}{\partial \vec{y}}(\vec{x}_0).$$

Wir setzen  $\vec{\lambda}_0^T := \frac{\partial f}{\partial \vec{z}}(\vec{x}_0)\left(\frac{\partial h}{\partial \vec{z}}(\vec{x}_0)\right)^{-1} \in \mathbb{R}^{1 \times p}$  und haben

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{y}}(\vec{x}_0) = \vec{\lambda}_0^T \frac{\partial h}{\partial \vec{y}}(\vec{x}_0), \quad \frac{\partial f}{\partial \vec{z}}(\vec{x}_0) = \frac{\partial f}{\partial \vec{z}}(\vec{x}_0)\left(\frac{\partial h}{\partial \vec{z}}(\vec{x}_0)\right)^{-1} \frac{\partial h}{\partial \vec{z}}(\vec{x}_0) = \vec{\lambda}_0^T \frac{\partial h}{\partial \vec{z}}(\vec{x}_0),$$

also

$$f'(\vec{x}_0) = \vec{\lambda}_0^T h'(\vec{x}_0), \quad \text{bzw.} \quad \text{grad } f(\vec{x}_0) = h'(\vec{x}_0)^T \vec{\lambda}_0.$$

Das ist die Aussage des Satzes.

Ende Di  
06.06.17

**19.20. Rotation, Divergenz, Laplace:** Sei  $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$ . Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *Skalarfeld (auf  $D$ )* und eine Funktion  $\vec{v} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt *Vektorfeld (auf  $D$ )*.

**Bemerkung:** Ist  $f \in C^1$  ein Skalarfeld auf  $D$ , so ist  $\text{grad } f = \nabla f$  ein Vektorfeld auf  $D$ .

Partielle Ableitungen schreiben wir im folgenden als

$$\partial_j := \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

**Definition:** Sei  $\vec{v} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein  $C^1$ -Vektorfeld auf  $D$  mit Komponentenfunktionen  $v_1, v_2, \dots, v_n : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann definiert man die *Divergenz von  $\vec{v}$*  durch

$$\text{div } \vec{v} := \nabla \cdot \vec{v} := \partial_1 v_1 + \partial_2 v_2 + \dots + \partial_n v_n = \sum_{j=1}^n \partial_j v_j$$

und im Fall  $n = 3$  die *Rotation von  $\vec{v}$*  durch

$$\text{rot } \vec{v} := \nabla \times \vec{v} := \begin{pmatrix} \partial_2 v_3 - \partial_3 v_2 \\ \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3 \\ \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 \end{pmatrix}.$$

**Bemerkung:** (a)  $\operatorname{div} \vec{v}$  ist ein Skalarfeld auf  $D$  und  $\operatorname{rot} \vec{v}$  ist ein Vektorfeld auf  $D$ .

(b) Vektorfelder mit  $\operatorname{div} \vec{v} = 0$  heißen *quellenfrei* und Vektorfelder mit  $\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{0}$  heißen *wirbelfrei*.

(c) Für  $C^2$ -Skalarfelder  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  definiert man den *Laplaceoperator* durch

$$\Delta f := \operatorname{div} \operatorname{grad} f := \nabla \cdot \nabla f := \sum_{j=1}^n \partial_j^2 f,$$

und für  $C^2$ -Vektorfelder  $\vec{v} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  durch

$$\Delta \vec{v} = \begin{pmatrix} \Delta v_1 \\ \Delta v_2 \\ \vdots \\ \Delta v_n \end{pmatrix}.$$

**Beispiele:** (1) Sei  $\vec{v} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\vec{v}(\vec{x}) := \vec{x}$ . Dann gilt  $\operatorname{div} \vec{v}(\vec{x}) = n$  für jedes  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ . Im Falle  $n = 3$  gilt  $\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{0}$  auf  $\mathbb{R}^3$ .

(2) Sei  $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\vec{v}(x, y, z) := \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist  $\operatorname{rot} \vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$  für alle  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .

(3) Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $C^2$ -Funktion und  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  orthogonal, sowie  $g := f \circ A$ , dh  $g(\vec{x}) = f(A\vec{x})$ . Dann gilt  $\Delta g = (\Delta f) \circ A$ :

Wir schreiben hier  $D\vec{v}$  statt  $\vec{v}'$  für die Ableitung eines Vektorfelds  $\vec{v}$ . Es gilt dann

$$\operatorname{div} \vec{v} = \operatorname{Spur}(D\vec{v}).$$

Nun haben wir nach der Kettenregel (siehe 19.13):

$$\begin{aligned} \Delta g &= \operatorname{div}(\nabla g) = \operatorname{div}(A^T(\nabla f) \circ A) \\ &= \operatorname{Spur}(D(A^T(\nabla f) \circ A)) = \operatorname{Spur}(A^T D((\nabla f) \circ A)) \\ &= \operatorname{Spur}(A^T((D(\nabla f)) \circ A)A). \end{aligned}$$

Nach Satz 18.5(a) ist dies

$$= \operatorname{Spur}(((D(\nabla f)) \circ A) \underbrace{AA^T}_{=I_n}) = \operatorname{Spur}((D(\nabla f)) \circ A) = (\operatorname{div}(\nabla f)) \circ A = (\Delta f) \circ A.$$

Bedeutung: Ist  $Jf := f \circ A$ , so gilt  $\Delta f = J^{-1} \Delta Jf$  für jede  $C^2$ -Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , dh  $\Delta$  ist invariant unter orthogonalen Koordinatentransformationen.

(4) Der Laplace-Operator in Polarkoordinaten: Sei  $u = u(x, y)$  eine  $C^2$ -Funktion. Wir verwenden Polarkoordinaten  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$  und schreiben  $v(r, \varphi) :=$

$u(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ . Nun wenden wir  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  auf  $u(x, y) = v(r(x, y), \varphi(x, y))$  an, wollen dies aber mittels  $v$  und den Variablen  $r, \varphi$  ausdrücken. Nach Ketten- und Produktregel haben wir:

$$\begin{aligned}\partial_x v(r, \varphi) &= v_r r_x + v_\varphi \varphi_x \\ \partial_x^2 v(r, \varphi) &= \partial_x(v_r) r_x + v_r r_{xx} + \partial_x(v_\varphi) \varphi_x + v_\varphi \varphi_{xx} \\ &= v_{rr}(r_x)^2 + v_{r\varphi} r_x \varphi_x + v_r r_{xx} + v_{\varphi r} r_x \varphi_x + v_{\varphi\varphi}(\varphi_x)^2 + v_\varphi \varphi_{xx} \\ \Delta v(r, \varphi) &= v_r(r_{xx} + r_{yy}) + v_{rr}((r_x)^2 + (r_y)^2) + 2v_{r\varphi}(r_x \varphi_x + r_y \varphi_y) \\ &\quad + v_\varphi(\varphi_{xx} + \varphi_{yy}) + v_{\varphi\varphi}((\varphi_x)^2 + (\varphi_y)^2).\end{aligned}$$

Ableitungen von  $r$  und  $\varphi$  nach  $x$  und  $y$  berechnen wir aus  $r^2 = x^2 + y^2$  und  $\tan \varphi = y/x$ :

$$2rr_x = 2x, \quad \text{also} \quad r_x = x/r = \cos \varphi, \quad r_y = y/r = \sin \varphi, \quad (r_x)^2 + (r_y)^2 = 1.$$

Weiter ist  $rr_{xx} + (r_x)^2 = 1$ , also

$$r_{xx} = \frac{1 - (r_x)^2}{r}, \quad r_{yy} = \frac{1 - (r_y)^2}{r}, \quad r_{xx} + r_{yy} = \frac{2 - (r_x)^2 - (r_y)^2}{r} = \frac{1}{r}.$$

Für die Ableitungen von  $\varphi$  erhalten wir

$$(1 + \tan^2 \varphi) \varphi_x = -y/x^2, \quad (1 + \tan^2 \varphi) \varphi_y = 1/x$$

und wegen  $1 + \tan^2 \varphi = (\cos \varphi)^{-2}$ :

$$\varphi_x = -\cos^2 \varphi \frac{y}{x^2} = -\frac{\sin \varphi}{r}, \quad \varphi_y = \cos^2 \varphi \frac{1}{x} = \frac{\cos \varphi}{r}.$$

Wir lesen ab:

$$(\varphi_x)^2 + (\varphi_y)^2 = \frac{1}{r^2}, \quad r_x \varphi_x + r_y \varphi_y = 0.$$

Schließlich ist

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = -\cos \varphi \cdot \varphi_x \cdot \frac{1}{r} + \frac{\sin \varphi}{r^2} \cdot r_x - \sin \varphi \cdot \varphi_y \cdot \frac{1}{r} - \frac{\cos \varphi}{r^2} \cdot r_y = 0.$$

Zusammengefasst haben wir also

$$\Delta v(r, \varphi) = v_{rr} + \frac{1}{r} v_r + \frac{1}{r^2} v_{\varphi\varphi}$$

als Formel für den Laplace-Operator in Polarkoordinaten.

### 19.21. Rechenregeln:

**Produktregeln:** Seien  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\vec{v} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$   $C^1$ -Funktionen. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\nabla(fg) &= g\nabla f + f\nabla g \\ \nabla \cdot (f\vec{v}) &= f(\nabla \cdot \vec{v}) + (\nabla f) \cdot \vec{v} \\ \nabla \times (f\vec{v}) &= f(\nabla \times \vec{v}) + (\nabla f) \times \vec{v} \quad (n=3) \\ \Delta(fg) &= (\Delta f)g + 2\nabla f \cdot \nabla g + f(\Delta g) \quad (f, g \in C^2).\end{aligned}$$



Zum Nachrechnen wende man die eindimensionale Produktregel aus HM I auf die einzelnen partiellen Ableitungen an:

$$\partial_j(\phi\psi) = (\partial_j\phi)\psi + \phi(\partial_j\psi).$$

**Hintereinanderausführung:** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^3$ . Sind  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\vec{v} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$   $C^2$ -Funktionen, so gilt:

$$\begin{aligned} \text{rot}(\text{grad } f) &= \vec{0}, & \text{dh } \nabla \times (\nabla f) &= \vec{0} \\ \text{div}(\text{rot } \vec{v}) &= 0 & \text{dh } \nabla \cdot (\nabla \times \vec{v}) &= 0 \\ \text{rot}(\text{rot } \vec{v}) &= \nabla \times (\nabla \times \vec{v}) = \text{grad } \text{div } \vec{v} - \Delta \vec{v} = \nabla(\nabla \cdot \vec{v}) - \Delta \vec{v}. \end{aligned}$$

Die beiden ersten Regeln folgen aus dem Satz von Schwarz.

**19.22. Potentialfelder:** Sei  $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$  offen. Ein stetiges Vektorfeld  $\vec{v} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt *Potentialfeld* (oder *Gradientenfeld*, *konservatives Feld*), falls ein  $C^1$ -Skalarfeld (ein *Potential*)  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  existiert mit  $\vec{v} = \nabla f$  auf  $D$ .

**Bemerkung:** (a) Wegen 19.21 ist ein  $C^1$ -Potentialfeld  $\vec{v} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  wirbelfrei in  $D$ .

(b) Nach dem Satz von Schwarz gilt für ein  $C^1$ -Potentialfeld  $\vec{v} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit Komponenten  $v_1, v_2, \dots, v_n : D \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$\underbrace{\vec{v}'(\vec{x})}_{\in \mathbb{R}^{n \times n}} = \vec{v}'(\vec{x})^T, \quad \vec{x} \in D,$$

dh für alle  $j, k = 1, \dots, n$  ist

$$\partial_j v_k = \partial_k v_j \quad \text{auf } D.$$

Ende Do  
08.06.17

**Beispiel:** Für eine Punktladung  $Q$  im Ursprung  $\vec{0} \in \mathbb{R}^3$  ist das elektrische Potential  $\varphi$  im Punkt  $\vec{x}$  gegeben durch

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{x}\|}, \quad \vec{x} \in D := \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}.$$

Das elektrische Feld  $\vec{E}$  erhält man als  $\vec{E} = -\nabla\varphi$ . Also ist  $\vec{E}$  ein Potentialfeld auf  $D$  mit Potential  $-\varphi$ . Wegen

$$\partial_j \varphi(\vec{x}) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2x_j}{2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}}, \quad j = 1, 2, 3,$$

ist

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{Q \vec{x}}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{x}\|^3}, \quad \vec{x} \in D.$$

Die *Äquipotentialflächen*  $\{\vec{x} \in D : \varphi(\vec{x}) = c\}$  für  $c > 0$  sind hier Kugeloberflächen. Als (negativer) Gradient des Potentials  $\varphi$  steht das elektrische Feld  $\vec{E}$  in jedem Punkt  $\vec{x}$  senkrecht auf der Äquipotentialfläche durch  $\vec{x}$  (vgl. auch 19.12). Nach Bemerkung (a) oben ist das elektrische Feld  $\vec{E}$  wirbelfrei in  $D$ .

## 20 Kurvenintegrale und Integralsätze im $\mathbb{R}^2$

**20.1. Kurvenintegrale von Skalarfeldern:** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Für eine reguläre Kurve  $\gamma : [a, b] \rightarrow D$  (dh  $\gamma \in C^1$  und  $\dot{\gamma}(t) \neq \vec{0}$  für alle  $t \in [a, b]$ , siehe 19.5) setzt man

$$\int_{\gamma} f ds := \int_a^b f(\gamma(t)) \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$

(beachte, dass  $\gamma(t)$  und  $\dot{\gamma}(t)$  Vektoren aus  $\mathbb{R}^n$  sind).

**Bemerkung:** (a) Ist  $\tilde{\gamma}$  eine orientierungserhaltende Umparametrisierung von  $\gamma$  (siehe 19.5), so gilt  $\int_{\gamma} f ds = \int_{\tilde{\gamma}} f ds$ .

(b) Für  $f = 1$  ist  $\int_{\gamma} ds$  die Länge von  $\gamma$  (vgl. 19.6). “ $ds = \|\dot{\gamma}(t)\| dt$ ” heißt *skalares Linienelement* von  $\gamma$ .

(c) Ist  $\gamma$  wie oben und setzt man  $\rho : [a, b] \rightarrow D$ ,  $\rho(t) := \gamma(a + b - t)$ , so durchläuft  $\rho$  die Spur von  $\gamma$  in umgekehrter Richtung. Diese Kurve wird auch mit  $-\gamma$  bezeichnet. Es gilt dann

$$\int_{-\gamma} f ds = \int_{\gamma} f ds.$$

(d) Sind  $\gamma_j : [a_{j-1}, a_j] \rightarrow D$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ , reguläre Kurven mit  $\gamma_j(a_j) = \gamma_{j+1}(a_j)$ , so bezeichnet man auch  $\gamma : [a_0, a_m] \rightarrow D$ ,  $\gamma(t) := \gamma_j(t)$ , falls  $t \in [a_{j-1}, a_j]$ , als *Kurve*. In den Punkten  $a_1, a_2, \dots, a_{m-1}$  muss  $\gamma$  nicht differenzierbar sein, dh die rechts- und linksseitigen Ableitungen in diesen Punkten müssen nicht übereinstimmen. Man schreibt  $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_m$  und definiert

$$\int_{\gamma} f ds := \sum_{j=1}^m \int_{\gamma_j} f ds.$$

(e) Ist  $\gamma : [a, b] \rightarrow D$  geschlossen, dh  $\gamma(a) = \gamma(b)$ , so schreibt man auch

$$\int_{\gamma} f ds = \oint_{\gamma} f ds.$$

**20.2. Kurvenintegrale von Vektorfeldern:** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $\vec{v} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig. Für eine reguläre Kurve  $\gamma : [a, b] \rightarrow D$  (siehe 19.5) setzt man

$$\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} := \int_a^b \vec{v}(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt$$

(beachte, dass  $\gamma(t)$  und  $\dot{\gamma}(t)$  Vektoren aus  $\mathbb{R}^n$  sind und dass  $\cdot$  das Skalarprodukt im  $\mathbb{R}^n$  bezeichnet).

“ $d\vec{s} = \dot{\gamma}(t) dt$ ” heißt *vektorielles Linienelement* von  $\gamma$ .

**Bemerkung:** Mit  $\vec{T}(t) := \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|}$  (Tangenteneinheitsvektor an die Kurve  $\gamma$  im Punkt  $\gamma(t)$ ) haben wir “ $d\vec{s} = \vec{T}(t) ds$ ” (vgl. 20.1) und also

$$\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma} (\vec{v} \cdot \vec{T}) ds$$

(dazu betrachte man  $\vec{T}$  als Funktion auf der Spur von  $\gamma$ , was jedenfalls geht, wenn  $\gamma$  doppelpunktfrei und nicht geschlossen ist; ansonsten muss man  $\gamma$  zusammensetzen wie in Bemerkung 20.1(d)). Die Gleichung bedeutet, dass von dem Vektorfeld  $\vec{v}$  entlang  $\gamma$  nur der Tangentialanteil integriert wird.

**Beispiele:** (1) Es gilt

$$\int_{-\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} = - \int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s},$$

dh das Kurvenintegral eines Vektorfeldes ändert bei Orientierungsumkehr der Kurve das Vorzeichen (vgl. aber mit 20.1 Bemerkung (c)).

(2) Ist  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  ein  $C^1$ -Skalarfeld und  $\gamma : [a, b] \rightarrow D$  eine Kurve, so gilt

$$\int_{\gamma} \nabla f \cdot d\vec{s} = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

Das liegt an

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = \underbrace{f'(\gamma(t))}_{(\nabla f)(\gamma(t))^T} \dot{\gamma}(t) = (\nabla f)(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)$$

und dem Hauptsatz (aus HM I):

$$f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = \int_a^b \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) dt.$$

(3) Sei  $\vec{v} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\vec{v}(x, y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$  und  $\gamma(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ . Dann ist  $\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$  und

$$\int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt = 2\pi.$$

Sei  $\vec{w} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\vec{w}(x, y) = \begin{pmatrix} -y/(x^2+y^2) \\ x/(x^2+y^2) \end{pmatrix}$ . Auch hier gilt

$$\int_{\gamma} \vec{w} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt = 2\pi.$$

Ende M  
12.06.17

**20.3. Gebiete und einfach zusammenhängende Mengen:** Eine Teilmenge  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt *konvex*, falls für je zwei Punkte  $\vec{x}, \vec{y} \in K$  gilt:  $S[\vec{x}, \vec{y}] \subseteq K$  ( $S[\vec{x}, \vec{y}]$  ist die Verbindungsstrecke von  $\vec{x}$  und  $\vec{y}$ , siehe 19.16).

**Beispiele:**  $K(\vec{0}, 1)$  ist konvex,  $K(\vec{0}, 1) \setminus \{\vec{0}\}$  ist nicht konvex.

**Definition:** Sind  $\vec{x}_0, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m \in \mathbb{R}^n$ , so heißt

$$S[\vec{x}_0, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m] := S[\vec{x}_0, \vec{x}_1] \cup S[\vec{x}_1, \vec{x}_2] \cup \dots \cup S[\vec{x}_{m-1}, \vec{x}_m]$$

Streckenzug durch  $\vec{x}_0, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m$ .

Ein Streckenzug ist eine Kurve im Sinne von 20.1 Bemerkung (d).

**Definition:** Eine offene Teilmenge  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt ein *Gebiet*, falls es zu je zwei Punkten  $\vec{x}, \vec{y} \in G$  einen Streckenzug  $S[\vec{x}_0, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m] \subseteq G$  gibt mit  $\vec{x}_0 = \vec{x}$  und  $\vec{x}_m = \vec{y}$ , dh wenn man je zwei Punkte aus  $G$  durch einen ganz in  $G$  liegenden Streckenzug verbinden kann.

**Beispiele:** Ist  $G$  offen und konvex, so ist  $G$  ein Gebiet.  $\mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$  ist ein Gebiet.  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$  ist kein Gebiet.

**Definition:** Ein Gebiet  $G$  heißt *einfach zusammenhängend*, wenn es für jeden Streckenzug  $S = S[\vec{x}_0, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m] \subseteq G$  mit  $\vec{x}_0 = \vec{x}_m$  einen Punkt  $\vec{c} \in G$  und endlich viele Kurven  $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k : [0, 1] \rightarrow G$  gibt mit  $S = S[\gamma_j(0), \gamma_1(0), \dots, \gamma_k(0), \gamma_0(0)]$ ,  $\gamma_j(1) = \vec{c}$  für  $j = 1, \dots, k$  und  $S[\gamma_0(t), \gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_k(t), \gamma_0(t)] \subseteq G$  für jedes  $t \in [0, 1]$ .

Dh: Man kann jeden geschlossenen Streckenzug in  $G$  zu einem Punkt zusammenziehen. Für Teilmengen  $G \subseteq \mathbb{R}^2$  bedeutet dies anschaulich: “ $G$  hat keine Löcher.”

**Beispiele:**  $\mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$  ist nicht einfach zusammenhängend. Konvexe Mengen sind einfach zusammenhängend.

Gibt es in  $G$  einen Punkt  $\vec{c} \in G$  mit  $S[\vec{x}, \vec{c}] \subseteq G$  für jedes  $\vec{x} \in G$  (solche Gebiete heißen *sternförmig*), so ist  $G$  einfach zusammenhängend.

$\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$  ist einfach zusammenhängend, aber  $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$  ist **nicht** einfach zusammenhängend.

## 20.4. Kurvenintegrale und Potentialfelder:

**Satz 1:** Sei  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Gebiet und  $\vec{v} : G \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein stetiges Vektorfeld. Dann sind äquivalent:

- (i)  $\vec{v}$  ist Potentialfeld in  $G$ .
- (ii) Für je zwei Punkte  $\vec{x}, \vec{y} \in G$  ist  $\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s}$  unabhängig von der Kurve  $\gamma : [a, b] \rightarrow G$  mit  $\gamma(a) = \vec{x}$ ,  $\gamma(b) = \vec{y}$ .
- (iii) Für jede geschlossene Kurve  $\gamma : [a, b] \rightarrow G$  gilt

$$\oint_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} = 0.$$

**Satz 2:** Ist  $G$  einfach zusammenhängend und  $\vec{v} : G \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein  $C^1$ -Vektorfeld, so ist außerdem äquivalent:

(iv) Für alle  $j, k = 1, \dots, n$  gilt:  $\partial_j v_k = \partial_k v_j$  auf  $G$  (*Verträglichkeitsbedingung*).

Für  $G \subseteq \mathbb{R}^3$  gilt also, ist  $G$  einfach zusammenhängend und ist  $\text{rot } \vec{v} = \vec{0}$  in  $G$ , so ist  $\vec{v}$  ein Potentialfeld in  $G$ .

**Beispiele:** (1) Sei  $\vec{v}(x, y) = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2+1 \end{pmatrix}$  auf  $G := \mathbb{R}^2$ .  $G$  ist konvex, also einfach zusammenhängend. Hier gilt

$$\partial_y v_1 = \partial_y(2xy) = 2x = \partial_x(x^2 + 1) = \partial_x v_2 \quad \text{auf } \mathbb{R}^2.$$

Nach Satz 2 ist  $\vec{v}$  ein Potentialfeld auf  $\mathbb{R}^2$ . Berechnung eines Potentials  $f$  etwa durch den Ansatz:

$$f(x, y) = \int v_1(x, y) dx + \phi(y) = \int 2xy dx + \phi(y) = x^2 y + \phi(y).$$

Nun muss  $\partial_y(x^2 y + \phi(y)) = v_2(x, y) = x^2 + 1$  sein, also  $x^2 + \phi'(y) = x^2 + 1$ , dh  $\phi'(y) = 1$  und etwa  $\phi(y) = y$ . Ein Potential  $f$  auf  $\mathbb{R}^2$  ist also gegeben durch  $f(x, y) = x^2 y + y$ .

(2) Sei  $\vec{w}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{-y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$  für  $(x, y) \in G := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . Dann ist  $\vec{w}$  ein  $C^1$ -Vektorfeld, das die Bedingung (iv) erfüllt: Es ist

$$\partial_y w_1 = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \partial_x w_2.$$

Für die geschlossene Kurve  $\gamma$  aus Beispiel 20.2(3) gilt aber

$$\int_{\gamma} \vec{w} \cdot d\vec{s} = 2\pi.$$

Also ist  $\vec{w}$  nach Satz 1 kein Potentialfeld auf  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  ist **nicht** einfach zusammenhängend.

Auf z.B.  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$  (was konvex, also einfach zusammenhängend ist) ist  $\vec{w}$  aber nach Satz 2 ein Potentialfeld und  $f(x, y) := \arctan(y/x)$  definiert ein Potential.

**20.5. Integration über Teilmengen im  $\mathbb{R}^2$ :** Sei  $R := [a, b] \times [c, d] \subseteq \mathbb{R}^2$  ein Rechteck. Man erklärt Integrierbarkeit und Integral für beschränkte Funktionen  $f : R \rightarrow \mathbb{R}$  ähnlich wie in 10.1 und 10.2 (HM I), indem man Zerlegungen  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  und  $c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d$  und die daraus resultierenden Zerlegungen  $[x_{j-1}, x_j] \times [y_{k-1}, y_k]$ ,  $j = 1, \dots, n$ ,  $k = 1, \dots, m$  von  $R$  betrachtet. Ist  $f$  integrierbar, schreiben wir

$$\iint_R f(x, y) d(x, y)$$

für das Integral.

**Satz 1:** Sei  $f : R \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann ist  $f$  integrierbar und es gilt

$$\iint_R f(x, y) d(x, y) = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy.$$

**Beispiel:**

$$\iint_{[0,1] \times [0,1]} xy d(x, y) = \int_0^1 \left( \int_0^1 xy dy \right) dx = \int_0^1 \left[ x \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^1 \frac{x}{2} dx = \left[ \frac{x^2}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{4}.$$

**Definition:** Ist  $B \subseteq \mathbb{R}^2$  beschränkt und  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt. Dann heißt  $f$  über  $B$  integrierbar, falls es ein Rechteck  $R$  gibt mit  $B \subseteq R$  und die Funktion  $f_0 : R \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_0(x, y) := \begin{cases} f(x, y) & , (x, y) \in B \\ 0 & , (x, y) \notin B \end{cases}$ , integrierbar ist. Man setzt

$$\iint_B f(x, y) d(x, y) = \iint_R f_0(x, y) d(x, y).$$

**Satz 2:** Ist  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, wobei

$$B := \{(x, y) : x \in [a, b], y \in [c(x), d(x)]\}$$

und  $c, d : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetige Funktionen sind, so ist  $f$  über  $B$  integrierbar und

$$\iint_B f(x, y) d(x, y) = \int_a^b \left( \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

Entsprechendes gilt, wenn die Rollen von  $x$  und  $y$  vertauscht werden, dh für Mengen

$$C = \{(x, y) : y \in [c, d], x \in [a(y), b(y)]\},$$

wobei  $a, b : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig sind. Es ist dann

$$\iint_C f(x, y) d(x, y) = \int_c^d \left( \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

**Beispiele:** (1) Sei  $B := \{(x, y) : x, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$ . Dann ist

$$\iint_B x d(x, y) = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} x dy dx = \int_0^1 x \sqrt{1-x^2} dx = \left[ -\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2} \right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

(2) Sei  $B := \{(x, y) : y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$ . Dann ist

$$\iint_B d(x, y) = \int_{-1}^1 \left( \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \right) dx = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{2}$$

der Flächeninhalt von  $B$ .

Ende Di  
13.06.17

**Bemerkung:** (a) In Satz 2 ist  $B$  **abgeschlossen**. Integriert man nur über die **offene** Menge

$$\text{inn}(B) := \{(x, y) : a < x < b, c(x) < y < d(x)\},$$

(das *Innere von B*), so ändert sich das Integral nicht ( $f$  ist aber als stetig auf  $B$  vorausgesetzt!).

(b) Lässt sich eine abgeschlossene Menge  $A$  schreiben als  $A = \bigcup_{j=1}^n A_j$ , wobei jedes  $A_j$  von der Form der obigen Mengen  $B$  oder  $C$  ist und  $\text{inn}(A_1), \text{inn}(A_2), \dots, \text{inn}(A_n)$  paarweise disjunkt sind, so gilt für stetiges  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$\iint_A f(x, y) d(x, y) = \sum_{j=1}^n \iint_{A_j} f(x, y) d(x, y).$$

(c) Wir werden im folgenden über *Gebiete*  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  integrieren. Die Funktionen  $f$  werden stetig sein auf

$$\bar{G} := G \cup \partial G,$$

wobei  $\partial G$  (der *Rand von G*) die Menge aller *Randpunkte von G* ist. Dabei heißt ein  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  *Randpunkt von G*, falls  $K(\vec{x}, \varepsilon) \cap G \neq \emptyset$  und  $K(\vec{x}, \varepsilon) \cap (\mathbb{R}^n \setminus G) \neq \emptyset$  für jedes  $\varepsilon > 0$  ("in jeder Umgebung von  $\vec{x}$  liegen Punkte aus  $G$  und Punkte aus  $\mathbb{R}^n \setminus G$ "). Die Menge  $\bar{G}$  ist abgeschlossen.

**Beispiele:** Es gilt etwa  $\partial K(\vec{x}_0, r) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x} - \vec{x}_0\| = r\}$  und  $\partial(\mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}) = \{\vec{0}\}$ . Für  $G = \text{inn}(B)$  von oben gilt

$$\partial G = \{(x, y) : x \in [a, b], y \in \{c(x), d(x)\}\} \cup \{(a, y) : y \in [c(a), d(a)]\} \cup \{(b, y) : y \in [c(b), d(b)]\}.$$

**20.6. Gaußscher Integralsatz im  $\mathbb{R}^2$ :** Sei  $G \subseteq \mathbb{R}^2$  ein Gebiet so, dass sich Bemerkung 20.5(b) auf  $\bar{G}$  anwenden lässt. Der Rand  $\partial G$  von  $G$  bestehe aus endlich vielen regulären Kurven  $\gamma_1, \dots, \gamma_m$  so, dass  $\gamma := \gamma_1 + \dots + \gamma_m$  (im Sinne von Bemerkung 20.1(d)) geschlossen und doppelpunktfrei ist und  $\partial G$  als Spur hat. Die Orientierung von  $\gamma$  sei so, dass  $G$  "links von  $\gamma$  liegt". In dieser Situation schreibt man statt  $\oint_\gamma$  suggestiv auch  $\oint_{\partial G}$ .

**Satz:** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  offen mit  $\bar{G} \subseteq D$  und  $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in C^1(D, \mathbb{R}^2)$ . Dann gilt:

$$\oint_{\partial G} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \iint_G (\partial_1 v_2(x, y) - \partial_2 v_1(x, y)) d(x, y).$$

**Bemerkung:** Manchmal wird auch  $\oint_{\partial G} v_1(x, y) dx + v_2(x, y) dy$  statt  $\oint_{\partial G} \vec{v} \cdot d\vec{s}$  geschrieben.

Wir betrachten den Fall eines offenen Rechtecks  $G = (0, b) \times (0, d)$  und parametrisieren die vier Seiten jeweils durch die Bogenlänge. Dann ist

$$\begin{aligned} \oint_{\partial G} \vec{v} \cdot d\vec{s} &= \int_0^b v_1(x, 0) dx + \int_0^d v_2(b, y) dy - \int_0^b v_1(x, d) dx - \int_0^d v_2(0, y) dy \\ &= \int_0^d \underbrace{v_2(b, y) - v_2(0, y)}_{=\int_0^b \partial_1 v_2(x, y) dx} dy - \int_0^b \underbrace{v_1(x, d) - v_1(x, 0)}_{=\int_0^d \partial_2 v_1(x, y) dy} dx \\ &= \iint_G (\partial_1 v_2(x, y) - \partial_2 v_1(x, y)) d(x, y). \end{aligned}$$

**Bemerkung:** Der Satz ist formuliert für Gebiete  $G$  mit einer geschlossenen Randkurve, dh  $G$  ist hier einfach zusammenhängend. Gebiete  $G$ , die nicht einfach zusammenhängend sind, kann man in einfach zusammenhängende Gebiete “zerschneiden”. Dabei beachte man, dass sich die Kurvenintegrale über die “Schnittlinien” beim Zusammenaddieren wegheben. Der Satz gilt also auch, wenn  $G$  so ist, dass sich Bemerkung 20.5(b) auf  $\bar{G}$  anwenden lässt, und der Rand  $\partial G$  aus endlich vielen disjunkten geschlossenen Kurven im Sinne von Bemerkung 20.1(d) besteht.

**20.7. Stokesscher Integralsatz im  $\mathbb{R}^2$ :** Seien  $G$ ,  $\partial G$ ,  $D$  und  $\vec{v}$  wie in 20.6. Die rechte Seite im Satz lässt sich schreiben als

$$\iint_G \left( \nabla \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \vec{e}_3 d(x, y).$$

**Bemerkung:** Hier kann in der dritten Komponente statt 0 auch eine beliebige Funktion  $v_3 \in C^1(D, \mathbb{R})$  stehen.

**20.8. Divergenzsatz im  $\mathbb{R}^2$ :** Seien  $G$ ,  $\partial G$ ,  $D$  wie in 20.6 und sei  $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \in C^1(D, \mathbb{R}^2)$ . Der Rand  $\partial G$  sei parametrisiert durch  $\vec{\gamma}(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix}$ ,  $0 \leq s \leq L$  (dh also bzgl. der Bogenlänge). Dann ist  $\vec{\gamma}'(s) = \vec{T}(s) = \begin{pmatrix} x'(s) \\ y'(s) \end{pmatrix}$  und  $\|\vec{T}(s)\| = 1$ . Setzt man  $\vec{N}(s) := \begin{pmatrix} y'(s) \\ -x'(s) \end{pmatrix}$ , so ist  $\vec{N}(s)$ ,  $\vec{T}(s)$  ein Rechtssystem in  $\mathbb{R}^2$ . Da  $G$  “links von  $\gamma$ ” liegt, ist  $\vec{N}(s)$  senkrecht auf  $\partial G$  und nach außen gerichtet (*äußere Einheitsnormale*).

Setzt man  $\vec{v} := \begin{pmatrix} -w_2 \\ w_1 \end{pmatrix}$ , so erhält man aus 20.6:

$$\oint_{\partial G} \vec{w} \cdot \vec{N} ds = \iint_G (\nabla \cdot \vec{w}) d(x, y).$$



Wegen  $v_1 = -w_2$  und  $v_2 = w_1$  ist nämlich

$$\vec{v} \cdot d\vec{s} = \vec{v} \cdot \vec{T} ds = \vec{w} \cdot \vec{N} ds$$

und  $\partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 = \partial_1 w_1 + \partial_2 w_2$ .

**Bemerkung:** In  $\oint_{\partial G} \vec{w} \cdot \vec{N} ds$  wird der Anteil des Vektorfeldes  $\vec{w}$  in äußerer Normalenrichtung aufintegriert. Das Integral ist also der *Fluss* des Vektorfeldes durch  $\partial G$  (aus  $G$  heraus). Die Divergenz  $\nabla \cdot \vec{w}$  ist ein Maß für die *Quelldichte* des Vektorfeldes.

Insbesondere gilt: Ist  $\vec{w}$  *quellenfrei* in  $D$  (dh  $\nabla \cdot \vec{w} = 0$  in  $D$ ), so ist  $\oint_{\partial G} \vec{w} \cdot \vec{N} ds = 0$  für alle  $G$  wie in 20.6 mit  $\overline{G} \subseteq D$  (und umgekehrt).

**Beispiel:** Sei  $r > 0$  und  $G := \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq r^2\}$ . Wir parametrisieren  $\partial G = \{(x, y) : x^2 + y^2 = r^2\}$  durch  $\gamma(t) := \begin{pmatrix} r \cos t \\ r \sin t \end{pmatrix}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ . Anhand einer Skizze ist klar, dass  $\vec{N}(\gamma(t)) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$  bzw.  $\vec{N}(x, y) = \begin{pmatrix} x/\sqrt{x^2+y^2} \\ y/\sqrt{x^2+y^2} \end{pmatrix}$  für  $(x, y) \in \partial G$ .

[ Parametrisieren wir nach der Bogenlänge, so ist  $\vec{\gamma}(s) = \begin{pmatrix} r \cos(s/r) \\ r \sin(s/r) \end{pmatrix}$ ,  $s \in [0, 2\pi r]$ , und  $\vec{\gamma}'(s) = \vec{T}(s) = \begin{pmatrix} -\sin(s/r) \\ \cos(s/r) \end{pmatrix}$ , sowie  $\vec{N}(s) = \begin{pmatrix} \cos(s/r) \\ \sin(s/r) \end{pmatrix}$  ].

Das Vektorfeld sei gegeben durch  $\vec{w}(x, y) = \begin{pmatrix} xy \\ 2y \end{pmatrix}$ . Dann gilt  $\vec{w} \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  und

$$\begin{aligned} \oint_{\partial G} \vec{w} \cdot \vec{N} ds &= \iint_G \nabla \cdot \vec{w} d(x, y) = \iint_G (y + 2) d(x, y) \\ &= \int_{-r}^r \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} (y + 2) dy dx = 4 \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx. \end{aligned}$$

Wir substituieren  $x = r\xi$ ,  $dx = r d\xi$  und erhalten

$$\oint_{\partial G} \vec{w} \cdot \vec{N} ds = 4r^2 \int_{-1}^1 \sqrt{1 - \xi^2} d\xi = 2\pi r^2.$$

**20.9. Greensche Formeln:** Seien  $G$ ,  $\partial G$ ,  $D$  wie vorher und  $f \in C^2(D, \mathbb{R})$ ,  $g \in C^1(D, \mathbb{R})$ . Dann gilt die 1. *Greensche Formel*:

$$\oint_{\partial G} g \frac{\partial f}{\partial \vec{N}} ds = \iint_G \left( g \Delta f + \nabla g \cdot \nabla f \right) d(x, y).$$

Zum Beweis sei  $\vec{w} := g \nabla f$  in 20.8. Man beachte  $g \nabla f \cdot \vec{N} = g \frac{\partial f}{\partial \vec{N}}$  und

$$\nabla \cdot \vec{w} = \nabla \cdot (g \nabla f) = \nabla g \cdot \nabla f + g(\nabla \cdot \nabla f) = \nabla g \cdot \nabla f + g(\Delta f)$$

(Produktregel aus 19.21).

Sind  $f, g \in C^2(D, \mathbb{R})$ , so gilt die 2. Greensche Formel:

$$\oint_{\partial G} \left( g \frac{\partial f}{\partial \vec{N}} - f \frac{\partial g}{\partial \vec{N}} \right) ds = \iint_G (g \Delta f - f \Delta g) d(x, y).$$

Zum Beweis subtrahiere von der 1. Greenschen Formel die Formel, in der die Rollen von  $f$  und  $g$  vertauscht sind.

**Beispiel:** (1) Seien  $G, \partial G, D$  wie in 20.6 und  $u \in C^2(D, \mathbb{R})$  mit  $\Delta u = 0$  in  $G$  und  $u = 0$  auf  $\partial G$ . Mit  $f = g = u$  in der ersten Greenschen Formel erhält man

$$\iint_G \nabla u \cdot \nabla u d(x, y) = 0.$$

Da  $\nabla u \cdot \nabla u = \|\nabla u\|^2 \geq 0$  stetig in  $G$  ist, folgt  $\|\nabla u(x, y)\| = 0$  für alle  $(x, y) \in G$  und weiter  $\nabla u(x, y) = \vec{0}$  für alle  $(x, y) \in G$ .

Mit der folgenden Bemerkung erhält man, dass  $u$  auf  $G$  konstant ist. Da  $u$  stetig ist, ist  $u$  auch auf  $\overline{G}$  konstant. Da nach Voraussetzung aber  $u = 0$  auf  $\partial G \subseteq \overline{G}$  ist, folgt  $u = 0$  auf  $\overline{G}$ .

**Bemerkung:** Ist  $G$  ein Gebiet und  $u \in C^1(G, \mathbb{R})$  mit  $\nabla u = \vec{0}$  in  $G$ , so ist  $u$  auf  $G$  konstant.

**Begründung:** Zu je zwei Punkten  $\vec{x}, \vec{y} \in G$  findet man eine Kurve  $\gamma : [0, 1] \rightarrow G$  mit  $\vec{\gamma}(0) = \vec{x}$  und  $\vec{\gamma}(1) = \vec{y}$ . Nach Beispiel 20.2(2) ist

$$u(\vec{y}) - u(\vec{x}) = u(\vec{\gamma}(1)) - u(\vec{\gamma}(0)) = \int_{\gamma} \nabla u \cdot d\vec{s} = 0.$$

Hat man ein  $u \in C^2(D, \mathbb{R})$  mit  $\Delta u = 0$  in  $G$  und  $\frac{\partial u}{\partial \vec{N}} = 0$  auf  $\partial G$ , so folgt genauso, dass  $u$  auf  $\overline{G}$  konstant ist, aber z.B.  $u = 1$  ist auch eine Lösung.

Ende M  
19.06.17

**Beispiel:** (2) Seien  $u, \varphi \in C^2(D, \mathbb{R})$  mit  $\varphi(x, y) = 0$  für alle  $(x, y) \notin G$ . Dann ist auch  $\nabla \varphi(x, y) = \vec{0}$  für alle  $(x, y) \notin \overline{G}$  somit  $\varphi = 0$  und  $\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{N}} = 0$  auf  $\partial G$ . Aus der zweiten Greenschen Formel erhalten wir

$$\iint_G \varphi(\Delta u) d(x, y) = \iint_G u(\Delta \varphi) d(x, y)$$

(vergleiche partielle Integration).

**20.10. Bemerkung:** Die Sätze in 20.6–20.8 gelten auch, wenn statt  $C^1$  auf  $D$  nur vorausgesetzt wird:

Das Vektorfeld  $\vec{v}$  (bzw.  $\vec{w}$ ) ist auf  $G$  stetig differenzierbar und die Komponentenfunktionen sowie ihre partiellen Ableitungen lassen sich stetig auf  $\overline{G}$  fortsetzen. Man schreibt dafür:  $\vec{v}, \vec{w} \in C^1(\overline{G})$ .

Entsprechend wird definiert:  $f \in C^2(\overline{G}, \mathbb{R})$ , falls  $f \in C^2(G, \mathbb{R})$  ist und sich  $f$  und alle partiellen Ableitungen der Ordnung höchstens 2 stetig auf  $\overline{G}$  fortsetzen lassen.

## 21 Oberflächenintegrale und Integralsätze im $\mathbb{R}^3$

Wir beschäftigen uns zunächst mit Volumenintegralen im  $\mathbb{R}^3$  bzw. gleich allgemein mit Integralen im  $\mathbb{R}^n$  (vgl. mit 20.5).

**21.1. Integrale über Teilmengen von  $\mathbb{R}^n$ :** Sei  $Q := [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$  ein Quader im  $\mathbb{R}^n$  und  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt. Man erklärt *Integrierbarkeit von  $f$*  und das *Integral von  $f$  über  $Q$*  ähnlich wie in 10.1 und 10.2 (HM I). Dabei muss man jedes der Intervalle  $[a_j, b_j]$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , zerlegen:

$$a_j = z_{j,0} < z_{j,1} < \dots < z_{j,m(j)} = b_j,$$

und Supremum und Infimum von  $f$  auf den “kleinen” Quadern

$$\prod_{j=1}^n [z_{j,k(j)-1}, z_{j,k(j)}]$$

betrachten (hierbei ist  $k(j) \in \{1, 2, \dots, m(j)\}$  für jedes  $j = 1, 2, \dots, n$ ).

Ist  $f$  über  $Q$  integrierbar, schreibt man

$$\int_Q f(x_1, x_2, \dots, x_n) d(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

für das Integral und im Falle  $n = 3$  auch

$$\iiint_Q f(x, y, z) d(x, y, z).$$

**Satz:** Ist  $Q$  wie oben und  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, so ist  $f$  über  $Q$  integrierbar und

$$\int_Q f(x_1, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_n) = \int_{a_1}^{b_1} \left( \dots \left( \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n) dx_n \right) \dots \right) dx_1,$$

wobei die einzelnen Integrationen rechts in beliebiger Reihenfolge ausgeführt werden können.

**Bemerkung:** Sei  $B \subseteq \mathbb{R}^n$  beschränkt. Die Definition in 20.5 für Integrierbarkeit und Integral beschränkter Funktionen  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  gilt entsprechend (es ist nur “Rechteck  $R$ ” durch “Quader  $Q$ ” zu ersetzen; Integrierbarkeit und Integral sind unabhängig von dem Quader  $Q$  mit  $B \subseteq Q$ ).

Der folgende Satz gilt analog auch in höheren Dimensionen.

**21.2. Integration über projizierbare Teilmengen von  $\mathbb{R}^3$ :** Sei  $B \subseteq \mathbb{R}^3$  von der folgenden Form:

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in B_0, g(x, y) \leq z \leq h(x, y)\},$$

wobei  $g, h : B_0 \rightarrow \mathbb{R}$  stetig mit  $g \leq h$  und

$$B_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], u(x) \leq y \leq v(x)\}$$

mit  $u, v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig.

Ist dann  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, so ist  $f$  über  $B$  integrierbar und es gilt

$$\iiint_B f(x, y, z) d(x, y, z) = \int_a^b \left( \int_{u(x)}^{v(x)} \left( \int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx.$$

**Bemerkung:** (a) Die Rollen von  $x, y, z$  können vertauscht werden (vergleiche Satz 2 in 20.5).

(b) Für  $f = 1$  erhält man das *Volumen*  $\text{vol}(B)$  von  $B$ .

**Beispiele:** (1) Sei  $r > 0$  und

$$B = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2\}$$

(Kugel um  $\vec{0}$  mit Radius  $r$ ). Mit  $a = -r$ ,  $b = r$ ,  $u(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}$ ,  $v(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ ,  $g(x, y) = -\sqrt{r^2 - (x^2 + y^2)}$ ,  $h(x, y) = \sqrt{r^2 - (x^2 + y^2)}$  erhalten wir

$$\iiint_B d(x, y, z) = \int_{-r}^r \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} \int_{-\sqrt{r^2-(x^2+y^2)}}^{\sqrt{r^2-(x^2+y^2)}} dz dy dx = \int_{-r}^r \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} 2\sqrt{r^2 - (x^2 + y^2)} dy dx.$$

Wir substituieren im inneren Integral  $y = \sqrt{r^2 - x^2}\eta$ ,  $dy = \sqrt{r^2 - x^2} d\eta$  und erhalten

$$\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} 2\sqrt{r^2 - (x^2 + y^2)} dy = 2(r^2 - x^2) \int_{-1}^1 \sqrt{1 - \eta^2} d\eta = \pi(r^2 - x^2).$$

Somit ist

$$\text{vol}(B) = \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx = \pi \left[ r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-r}^r = \frac{4\pi}{3} r^3.$$

(2) Sei

$$B := \{(x, y, z) : 0 \leq x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}.$$

Wir berechnen

$$\iiint_B 1 d(x, y, z) = \int_0^1 \left( \int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} \left( \int_{-\sqrt{z-x^2}}^{\sqrt{z-x^2}} 1 dy \right) dx \right) dz = \int_0^1 \left( \iint_{\{(x,y):x^2+y^2 \leq z\}} 1 d(x, y) \right) dz.$$

Das innere Integral ist der Flächeninhalt eines Kreises mit Radius  $\sqrt{z}$ . Dieser Kreis ist der Schnitt durch  $B$  mit festgehaltener  $z$ -Komponente. Wir erhalten somit

$$\iiint_B 1 \, d(x, y, z) = \int_0^1 \pi z \, dz = \frac{\pi}{2}.$$

**Bemerkung** (Prinzip von Cavalieri): Für  $B \subseteq \mathbb{R}^3$  der Form

$$B = \{(x, y, z) : z \in [a, b], (x, y) \in B(z)\}$$

gilt allgemein

$$\iiint_B d(x, y, z) = \int_a^b \int_{B(z)} d(x, y) \, dz.$$

Hierbei ist  $B(z)$  der Schnitt durch  $B$  mit festgehaltener  $z$ -Komponente.

**Bemerkung:** Wir werden im folgenden über beschränkte Mengen im  $\mathbb{R}^3$  integrieren, die sich ähnlich wie in Bemerkung 20.5(2) in endlich viele Gebiete der Form  $B$  (mit eventuell vertauschten Rollen der Koordinaten) zerlegen lassen. Wir nennen solche Mengen *Integrationsbereiche*.

**21.3. Transformationsformel:** Sei  $B \subseteq \mathbb{R}^n$  beschränkt und abgeschlossen (meist ist  $n = 2$  oder  $n = 3$  und  $B$  ein Integrationsbereich) und  $U \supseteq B$  ein Gebiet. Sei  $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig differenzierbar und injektiv mit  $\det \Phi' \neq 0$  auf  $U$ , sowie  $A := \Phi(B)$  und  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt.

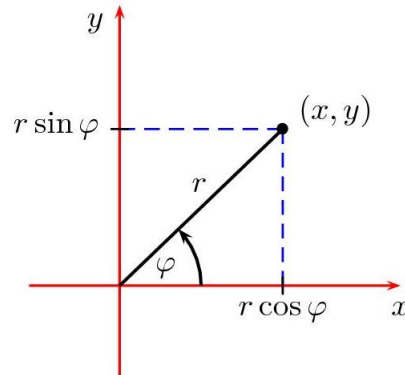
**Bemerkung:** Nach 19.14 ist dann auch  $V := \Phi(U)$  offen und  $\Phi : U \rightarrow V$  bijektiv und in beiden Richtungen stetig differenzierbar. Da  $U$  ein Gebiet und  $\det \Phi' : U \rightarrow \mathbb{R}$  stetig ist, gilt außerdem  $\det \Phi' > 0$  auf  $U$  oder  $\det \Phi' < 0$  auf  $U$ .

**Satz:** Es ist  $f$  integrierbar über  $A$  genau dann, wenn  $f \circ \Phi |\det \Phi'(\cdot)|$  über  $B$  integrierbar ist. In diesem Falle gilt

$$\int_A f(x) \, dx = \int_B f(\Phi(y)) |\det(\Phi'(y))| \, dy.$$

Im einfachsten Fall ist  $\Phi(x) = Cx + b$ , wobei  $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$  regulär ist und  $b \in \mathbb{R}^n$ . Nach der "Interpretation" in 18.9 muss das Volumen eines Quaders  $Q \subseteq B$  beim Abbilden mit  $\Phi$  gerade mit  $|\det(C)|$  multipliziert werden. Das ist die Kernidee hinter der Transformationsformel.

**21.4. Polarkoordinaten im  $\mathbb{R}^2$ :** Für  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  setze  $r := \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Dann findet man Winkel  $\varphi$  mit  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ .



Für  $\Phi(r, \varphi) := \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}$  gilt

$$\Phi'(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix},$$

also  $\det \Phi'(r, \varphi) = r$ .

Damit  $\Phi$  injektiv ist, nehme man etwa  $U = (0, \infty) \times (\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2)$  mit  $0 \leq \tilde{\varphi}_1 < \tilde{\varphi}_2 \leq 2\pi$  und  $\tilde{\varphi}_2 - \tilde{\varphi}_1 < 2\pi$ . Sind  $\tilde{\varphi}_1 < \varphi_1 < \varphi_2 < \tilde{\varphi}_2$ ,  $B := [R_1, R_2] \times [\varphi_1, \varphi_2]$  und  $A := \Phi(B)$ , so gilt für stetiges  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$\iint_A f(x, y) d(x, y) = \iint_B f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r d(r, \varphi) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{R_1}^{R_2} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi.$$

**Zusatz:** Diese Formel gilt auch für  $\varphi_1 = 0$  und  $\varphi_2 = 2\pi$ , sowie für  $R_1 = 0$ .

**Beispiele:** (1)  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ . Hier ist  $R_1 = 1$ ,  $R_2 = 2$ ,  $\varphi_1 = 0$ ,  $\varphi_2 = \pi$ , also  $B = [1, 2] \times [0, \pi]$ . Es gilt also für  $f(x, y) = y\sqrt{x^2 + y^2}$ :

$$\begin{aligned} \iint_A y\sqrt{x^2 + y^2} d(x, y) &= \iint_B r \sin \varphi r r d(r, \varphi) = \int_0^\pi \int_1^2 r^3 \sin \varphi dr d\varphi \\ &= \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi \cdot \int_1^2 r^3 dr = 2 \cdot \left[ \frac{r^4}{4} \right]_1^2 = \frac{15}{2}. \end{aligned}$$

(2) Sei  $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4 - z, z \in [0, 4]\}$  und  $A := \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \text{vol}(M) &= \iiint_M 1 d(x, y, z) = \iint_A \left( \int_0^{4-(x^2+y^2)} 1 dz \right) d(x, y) \\ &= \iint_A 4 - (x^2 + y^2) d(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 - r^2) r dr d\varphi = 8\pi. \end{aligned}$$

Ende Di  
20.06.17

(3) Wir berechnen das Integral  $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$  (das war in HM I nicht möglich). Dazu sei  $R > 0$  und

$$K_R := \{(x, y) : x, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq R^2\}, \quad Q_R := [0, R] \times [0, R]$$

und  $\rho := \sqrt{2}R$ , sowie  $f(x, y) := e^{-(x^2+y^2)}$  auf  $\mathbb{R}^2$ .

Dann gilt

$$\iint_{K_R} f(x, y) d(x, y) \leq \iint_{Q_R} f(x, y) d(x, y) \leq \iint_{K_\rho} f(x, y) d(x, y),$$

$$\iint_{Q_R} f(x, y) d(x, y) = \iint_{Q_R} (e^{-x^2} e^{-y^2}) d(x, y) = \left( \int_0^R e^{-x^2} dx \right)^2,$$

$$\iint_{K_R} f(x, y) d(x, y) = \int_0^{\pi/2} \int_0^R e^{-r^2} r dr d\varphi = \frac{\pi}{4}(1 - e^{-R^2}),$$

und genauso

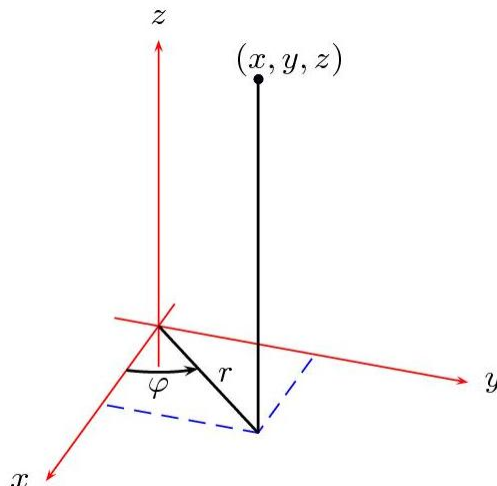
$$\iint_{K_\rho} f(x, y) d(x, y) = \frac{\pi}{4}(1 - e^{-\rho^2}) = \frac{\pi}{4}(1 - e^{-2R^2}).$$

Wir lassen nun  $R \rightarrow \infty$  und erhalten

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

**21.5. Zylinderkoordinaten im  $\mathbb{R}^3$ :** Hier ist  $\Phi(r, \varphi, z) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}$ , also  $x = r \cos \varphi$ ,

$y = r \sin \varphi$  und  $z = z$ .





Es gilt

$$\Phi'(r, \varphi, z) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

also  $\det \Phi'(r, \varphi, z) = r$ . Für  $A, B \subseteq \mathbb{R}^3$  wie in 21.3 und stetiges  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  gilt somit:

$$\iiint_A f(x, y, z) d(x, y, z) = \iiint_B f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) r d(r, \varphi, z).$$

Der Zusatz aus 21.4 gilt sinngemäß auch hier.

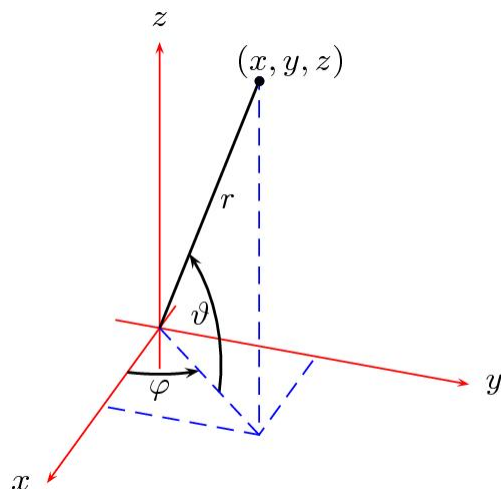
**Beispiel:**  $A = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq y \leq x, z \in [0, 1]\}$ , also  $B = [0, 1] \times [0, \pi/4] \times [0, 1]$ . Dann ist für  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + yz$ :

$$\begin{aligned} \iiint_A (x^2 + y^2 + yz) d(x, y, z) &= \iiint_B (r^2 + zr \sin \varphi) r d(r, \varphi, z) \\ &= \int_0^1 \int_0^{\pi/4} \int_0^1 (r^2 + zr \sin \varphi) r dz d\varphi dr \\ &= \int_0^1 \int_0^{\pi/4} \left[ zr^3 + \frac{z^2}{2} r^2 \sin \varphi \right]_{z=0}^{z=1} d\varphi dr \\ &= \int_0^1 \int_0^{\pi/4} r^3 + \frac{r^2}{2} \sin \varphi d\varphi dr \\ &= \int_0^1 \frac{\pi}{4} r^3 + \frac{r^2}{2} [-\cos \varphi]_0^{\pi/4} dr = \frac{\pi}{16} + \frac{1}{6} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right). \end{aligned}$$

**21.6. Kugelkoordinaten im  $\mathbb{R}^3$ :** Man schreibt  $r = \|(x, y, z)\| = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$  und

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi(r, \varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \cos \vartheta \\ r \sin \varphi \cos \vartheta \\ r \sin \vartheta \end{pmatrix},$$

wobei  $r \geq 0$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi]$  und  $\vartheta \in [-\pi/2, \pi/2]$ .



Es ist

$$\Phi'(r, \varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \vartheta & -r \sin \varphi \cos \vartheta & -r \cos \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \cos \vartheta & r \cos \varphi \cos \vartheta & -r \sin \varphi \sin \vartheta \\ \sin \vartheta & 0 & -r \cos \vartheta \end{pmatrix},$$

also  $\det \Phi'(r, \varphi, \vartheta) = r^2 \cos \vartheta$ .

Sind  $A$  und  $B$  wie in 21.3, also  $A = \Phi(B)$ , und ist  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, so gilt:

$$\iiint_A f(x, y, z) d(x, y, z) = \iiint_B f(r \cos \varphi \cos \vartheta, r \sin \varphi \cos \vartheta, r \sin \vartheta) r^2 \cos \vartheta d(r, \varphi, \vartheta).$$

Der Zusatz in 21.4 gilt entsprechend.

**Beispiel:** Sei  $A = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x, y, z \geq 0\}$ . Dann ist  $B = [0, 1] \times [0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$ , und für  $f(x, y, z) = x \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  gilt:

$$\begin{aligned} \iiint_A x \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} d(x, y, z) &= \iiint_B r \cos \varphi \cos \vartheta \cdot r \cdot r^2 \cos \vartheta d(r, \varphi, \vartheta) \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^1 r^4 \cos \varphi \cos^2 \vartheta dr d\varphi d\vartheta \\ &= \int_0^1 r^4 dr \cdot \underbrace{\int_0^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi}_{=1} \cdot \underbrace{\int_0^{\pi/2} \cos^2 \vartheta d\vartheta}_{=\pi/4} = \frac{\pi}{20}. \end{aligned}$$

**21.7. Flächendarstellungen im  $\mathbb{R}^3$ :** Es gibt verschiedene Möglichkeiten, Flächen im  $\mathbb{R}^3$  darzustellen.

**Explizite Darstellung:**  $z = f(x, y)$ , z.B.  $z = \pm\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ , genauer

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{pmatrix} : (x, y) \in U \right\},$$

wobei  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  Gebiet und  $f \in C^1(U, \mathbb{R})$ .

**Implizite Darstellung:**  $F(x, y, z) = 0$ , z.B.  $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ , genauer

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in D : F(x, y, z) = 0 \right\},$$

wobei  $D \subseteq \mathbb{R}^3$  Gebiet und  $F \in C^1(D, \mathbb{R})$ . Hierbei sei  $\nabla F(x, y, z) \neq \vec{0}$  für  $(x, y, z) \in \mathcal{F}$ . Diese Bedingung sorgt dafür, dass man lokal immer nach einer der Variablen  $x$ ,  $y$  oder  $z$  auflösen kann (vgl. 19.15).

**Parameterdarstellung:** Beispiel

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} : \varphi \in (0, 2\pi), \vartheta \in (0, \pi) \right\},$$

allgemein

$$\mathcal{F} = \{ \vec{g}(u, v) : (u, v) \in U \},$$

wobei  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  Gebiet und  $\vec{g} \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$  **injektiv** ist mit  $\text{Rang } \vec{g}'(u, v) = 2$  für alle  $(u, v) \in U$  (beachte  $\vec{g}'(u, v) \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ ). Ein solches  $\mathcal{F}$  heißt *reguläres Flächenstück im  $\mathbb{R}^3$*  und  $\vec{g}$  heißt *reguläre Parametrisierung* von  $\mathcal{F}$ .

**Bemerkung:** Durch  $F(x, y, z) = z - f(x, y)$  kommt man von einer expliziten zu einer impliziten Darstellung. Die explizite Darstellung ist ein Spezialfall der Parameterdarstellung via

$$\vec{g}(x, y) := \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{pmatrix}, \quad (x, y) \in U.$$

Ende Do  
22.06.17

**Normaleneinheitsvektor:** Ist  $\mathcal{F}$  ein reguläres Flächenstück im  $\mathbb{R}^3$ , so gibt es in jedem Punkt auf der Fläche genau zwei Vektoren, die auf der Fläche senkrecht stehen und die Länge 1 haben. Sie sind entgegengesetzt gerichtet und heißen *Normaleneinheitsvektor*. Die Entscheidung für einen der beiden legt die *Orientierung des Flächenstücks* fest.

Häufig wird verlangt, dass  $\vec{N}$  “nach außen” zeigt, was aber voraussetzt, dass es überhaupt “innen” und “außen” gibt. Das ist im allgemeinen nicht der Fall.

Im folgenden betrachten wir  $\vec{N}$  als Abbildung  $\mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

In Parameterdarstellung ist

$$\vec{N}(\vec{g}(u, v)) = \pm \frac{\partial_u \vec{g}(u, v) \times \partial_v \vec{g}(u, v)}{\|\partial_u \vec{g}(u, v) \times \partial_v \vec{g}(u, v)\|}, \quad (u, v) \in U.$$

Wir verwenden, wenn nichts anderes gesagt wird, hier das **positive** Vorzeichen.

In impliziter Darstellung  $F(x, y, z) = 0$  ist der Normaleneinheitsvektor

$$\vec{N}(x, y, z) = \pm \frac{\nabla F(x, y, z)}{\|\nabla F(x, y, z)\|}, \quad (x, y, z) \in \mathcal{F}$$

(beachte, dass man statt  $F$  ebenso  $-F$  verwenden kann). Das liegt daran, dass der Gradient von  $F$  senkrecht auf der Niveaufläche steht (vgl. 19.12).

Für die explizite Darstellung  $z = f(x, y)$  erhalten wir

$$\vec{N}(x, y, f(x, y)) = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + (\partial_x f(x, y))^2 + (\partial_y f(x, y))^2}} \begin{pmatrix} -\partial_x f(x, y) \\ -\partial_y f(x, y) \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (x, y) \in U$$

(beachte, dass  $\partial_x \vec{g} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_x f \end{pmatrix}$ ,  $\partial_y \vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_y f \end{pmatrix}$  und  $\partial_x \vec{g} \times \partial_y \vec{g} = \begin{pmatrix} -\partial_x f \\ -\partial_y f \\ 1 \end{pmatrix}$  ist).

**21.8. Oberflächenintegral:** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  ein Gebiet und  $\vec{g} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine reguläre (insbesondere also injektive) Parametrisierung eines Flächenstücks. Dann heißt

$$do := \|\partial_u \vec{g}(u, v) \times \partial_v \vec{g}(u, v)\| d(u, v)$$

skalares Oberflächenelement, und

$$d\vec{o} := \partial_u \vec{g}(u, v) \times \partial_v \vec{g}(u, v) d(u, v)$$

heißt *vektorielles Oberflächenelement* des durch  $\vec{g}$  parametrisierten regulären Flächenstücks.

**Definition:** Sei  $B \subseteq U$  ein Integrationsbereich und  $\mathcal{F} := \vec{g}(B)$ . Für ein stetiges Skalarfeld  $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert man das (*Oberflächen-*)Integral von  $f$  über  $\mathcal{F}$  durch

$$\iint_{\mathcal{F}} f do := \iint_B f(\vec{g}(u, v)) \|\partial_u \vec{g}(u, v) \times \partial_v \vec{g}(u, v)\| d(u, v),$$

und für ein stetiges Vektorfeld  $\vec{w} : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}^3$  setzt man

$$\iint_{\mathcal{F}} \vec{w} \cdot d\vec{o} := \iint_B \vec{w}(\vec{g}(u, v)) \cdot (\partial_u \vec{g}(u, v) \times \partial_v \vec{g}(u, v)) d(u, v).$$

Für  $f = 1$  erhält man den *Flächeninhalt* von  $\mathcal{F}$ :

$$A(\mathcal{F}) := \iint_{\mathcal{F}} do = \iint_B \|\partial_u \vec{g}(u, v) \times \partial_v \vec{g}(u, v)\| d(u, v).$$

**Bemerkung:** Die Definitionen sind invariant unter orientierungserhaltenden Parametertransformationen.

**Bemerkung:** Wenn wir das vektorielle Oberflächenelement mit dem skalaren Oberflächenelement vergleichen und – wie in 21.7 gesagt – für  $\vec{N}$  das positive Vorzeichen nehmen, dh

$$\vec{N}(\vec{g}(u, v)) = \frac{\partial_u \vec{g}(u, v) \times \partial_v \vec{g}(u, v)}{\|\partial_u \vec{g}(u, v) \times \partial_v \vec{g}(u, v)\|},$$

so ist

$$\iint_{\mathcal{F}} \vec{w} \cdot d\vec{o} = \iint_{\mathcal{F}} \vec{w} \cdot \vec{N} \, do,$$

das ist der **Fluss** des Vektorfelds  $\vec{v}$  durch die mittels  $\vec{N}$  orientierte Fläche  $\mathcal{F}$ .

**Beispiel:** Wir berechnen den Flächeninhalt einer oberen Halbkugel

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \end{pmatrix} : x^2 + y^2 \leq R^2 \right\}$$

mit Radius  $R > 0$ . Wir haben eine explizite Darstellung mit  $f(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$  und  $\vec{g}(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{pmatrix}$ . Es ist  $\partial_x \vec{g} \times \partial_y \vec{g} = \begin{pmatrix} -\partial_x f \\ -\partial_y f \\ 1 \end{pmatrix}$ , wobei  $-\partial_x f = x/\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$  und  $-\partial_y f = y/\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ . Wir setzen  $B := \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2\}$ . Somit ist

$$\begin{aligned} A(\mathcal{F}) &= \iint_B \sqrt{\frac{x^2}{R^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{R^2 - x^2 - y^2} + 1} \, d(x, y) \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^R \sqrt{\frac{R^2}{R^2 - r^2}} \, r \, dr \, d\varphi \\ &= 2\pi R^2 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - \rho^2}} \, d\rho \\ &= 2\pi R^2 \left[ -\sqrt{1 - \rho^2} \right]_0^1 = 2\pi R^2. \end{aligned}$$

**21.9. Der Integralsatz von Stokes im  $\mathbb{R}^3$ :** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  ein Gebiet und  $\vec{g} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine reguläre Parametrisierung eines Flächenstücks  $\mathcal{F}^* := \vec{g}(U)$ .

Sei  $G \subseteq U$  ein Gebiet so, dass  $\bar{G}$  ein Integrationsbereich ist. Der Rand  $\partial G$  von  $G$  bestehe aus endlich vielen regulären Kurven  $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ , dh  $\gamma := \gamma_1 + \dots + \gamma_m$  (im Sinne von

Bemerkung 20.1(d)) ist doppelpunktfrei und hat  $\partial G$  als Spur. Die Orientierung von  $\gamma$  sei so, dass  $G$  "links von  $\gamma$  liegt" (dh  $\partial G$  ist *positiv orientiert*).

Sei  $\mathcal{F} := \vec{g}(G)$ . Dann ist  $\partial\mathcal{F} := \vec{g}(\partial G)$  parametrisiert durch  $\vec{g} \circ \gamma$ .

**Satz:** Ist nun  $V \subseteq \mathbb{R}^3$  offen mit  $\mathcal{F} \cup \partial\mathcal{F} \subseteq V$  und  $\vec{v} : V \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein  $C^1$ -Vektorfeld, so gilt

$$\oint_{\partial\mathcal{F}} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \iint_{\mathcal{F}} (\nabla \times \vec{v}) \cdot d\vec{o}.$$

Nach 20.2 können wir die linke Seite auch schreiben als

$$\oint_{\partial\mathcal{F}} \vec{v} \cdot \vec{T} ds,$$

wobei  $\vec{T} : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}^3$  der Tangenteneinheitsvektor ist, hier gegeben durch

$$\vec{T}(\vec{g}(\gamma(t))) = \frac{\vec{g}'(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)}{\|\vec{g}'(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)\|},$$

und die rechte Seite können wir schreiben als

$$\iint_{\mathcal{F}} (\nabla \times \vec{v}) \cdot \vec{N} do.$$

**Alternativ:** Ist  $\vec{T}$  auf  $\partial\mathcal{F}$  gegeben (und damit die Orientierung von  $\partial\mathcal{F}$  festgelegt), so sei im Punkt  $P \in \partial\mathcal{F}$  der Vektor  $\vec{n}$  der Vektor der Länge 1, der in der Tangentialebene an  $\mathcal{F}$  in  $P$  senkrecht auf  $\vec{T}$  steht und ins Äußere von  $\mathcal{F}$  weist. Die Richtung von  $\vec{N}$  ist dann diejenige von  $\vec{n} \times \vec{T}$ .

Anders ausgedrückt: Die Orientierung von  $\vec{N}$  auf  $\mathcal{F}$  ergibt sich aus der Orientierung von  $\partial\mathcal{F}$  im Sinne der "Rechtsschraubenregel". Man vergleiche hierzu auch die ebene Version des Stokesschen Integralsatzes in 20.7!

**Beispiele:** (1) Sei  $\mathcal{F} := \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$ . Dann ist  $\partial\mathcal{F} = \{(x, y, 0) : x^2 + y^2 = 1\}$ . Orientieren wir  $\partial\mathcal{F}$  durch  $\vec{T}(x, y, 0) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$ , so erhalten wir  $\vec{N}(x, y, z) =$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ für } (x, y, z) \in \mathcal{F}.$$

Wir wollen

$$J := \iint_{\mathcal{F}} (\nabla \times \vec{v}) \cdot d\vec{o}$$

berechnen, wobei  $\vec{v} \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$  sei.

Nach dem Stokesschen Satz ist

$$J = \oint_{\partial \mathcal{F}} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \vec{v}(\cos t, \sin t, 0) \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt.$$

Für  $\vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} -y + z \\ x + z \\ z - x \end{pmatrix}$  erhalten wir

$$J = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ -\cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt = 2\pi.$$

Hier ist übrigens  $\nabla \times \vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

(2) Sei  $G$  ein Integrationsbereich im  $\mathbb{R}^2$  mit einer aus endlich vielen regulären Kurven zusammengesetzten doppelpunktfreien Randkurve. Dann gilt für die Fläche  $A(G)$  von  $G$ :

$$A(G) = \frac{1}{2} \oint_{\partial G} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \cdot d\vec{s}.$$

(Man brette  $G$  in den  $\mathbb{R}^3$  ein und beachte  $\vec{N} = \vec{e}_3$  und  $\left(\nabla \times \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}\right) \cdot \vec{e}_3 = 2$ .)

Ende M  
26.06.17

(3) Anwendung von (2): Seien  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  mit  $0 < \beta - \alpha \leq 2\pi$  und  $r : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $C^1$ -Funktion. Sei  $G \subseteq \mathbb{R}^2$  gegeben durch

$$G = \{(r \cos t, r \sin t) : t \in (\alpha, \beta), r \in (0, r(t))\}.$$

Dann gilt die Leibnizsche Sektorformel:

$$A(G) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r(t)^2 dt.$$

(Die Integrale über die Strecken  $[(0, 0), (r(\alpha) \cos \alpha, r(\alpha) \sin \alpha)]$  und  $[(0, 0), (r(\beta) \cos \beta, r(\beta) \sin \beta)]$  verschwinden, das Integral über  $\gamma(t) = \begin{pmatrix} r(t) \cos t \\ r(t) \sin t \end{pmatrix}$ ,  $t \in [\alpha, \beta]$  rechne man aus.)

**21.10. Der Divergenzsatz im  $\mathbb{R}^3$ :** Sei  $B \subseteq \mathbb{R}^3$  ein beschränkter und abgeschlossener Integrationsbereich und  $G := B \setminus \partial B$  ein Gebiet mit  $\partial G = \partial B$  (dann ist  $\overline{G} = B$ ). Der

Rand  $\partial G$  lasse sich zerlegen in endlich viele reguläre Flächenstücke. Die Einheitsnormale  $\vec{N}$  auf  $\partial G$  sei ins Äußere von  $G$  gerichtet.

**Satz:** Sei  $V \subseteq \mathbb{R}^3$  offen mit  $\bar{G} \subseteq V$  und  $\vec{v} : V \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein  $C^1$ -Vektorfeld. Dann gilt

$$\iiint_G \nabla \cdot \vec{v} \, d\tau = \iint_{\partial G} \vec{v} \cdot \vec{N} \, do,$$

wobei wir hier  $d\tau$  für  $d(x, y, z)$  geschrieben haben.

**Beispiele:** (1) Für  $\vec{v} \in C^2(V, \mathbb{R}^3)$  gilt

$$\iint_{\partial G} (\nabla \times \vec{v}) \cdot d\vec{o} = 0,$$

da ja  $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{v} = 0$  in  $G$ . Nach 21.9 ist das nicht verwunderlich, da die Oberfläche  $\partial G$  von  $G$  ja *geschlossen* ist und selbst keinen (Flächen-)Rand hat.

(2) Für  $f \in C^2(V)$  gilt

$$\iiint_G \Delta f \, d\tau = \iint_{\partial G} \nabla f \cdot d\vec{o} = \iint_{\partial G} \nabla f \cdot \vec{N} \, do = \iint_{\partial G} \frac{\partial f}{\partial \vec{N}} \, do.$$

(3) **Greensche Formeln** Für  $f, g \in C^2(V, \mathbb{R})$  und  $h \in C^1(V, \mathbb{R})$  gilt:

$$\begin{aligned} \iint_{\partial G} h \frac{\partial f}{\partial \vec{N}} \, do &= \iiint_G (h \Delta f + \nabla h \cdot \nabla f) \, d\tau, \\ \iint_{\partial G} \left( g \frac{\partial f}{\partial \vec{N}} - f \frac{\partial g}{\partial \vec{N}} \right) \, do &= \iiint_G (g \Delta f - f \Delta g) \, d\tau. \end{aligned}$$

(4) Setzt man  $\vec{v}(\vec{x}) := \vec{x}$ , so gilt  $\nabla \cdot \vec{v} = 3$ , und wir erhalten

$$\operatorname{vol}(G) = \frac{1}{3} \iint_{\partial G} \vec{x} \cdot \vec{N} \, do.$$

Für  $G = \{\vec{x} : \|\vec{x}\| < R\}$  ist also wegen  $\vec{N} = \vec{x}/\|\vec{x}\|$ :

$$\operatorname{vol}(G) = \frac{1}{3} \iint_{\partial G} \|\vec{x}\| \, do = \frac{R}{3} \underbrace{A(\partial G)}_{=4\pi R^2} = \frac{4\pi}{3} R^3.$$



(5) Wir setzen  $f(\vec{x}) = \|\vec{x}\|^{-1}$  für  $\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$  und  $\vec{v} = \nabla f$ . Dann ist

$$\begin{aligned}\vec{v}(\vec{x}) &= \left( -\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-3/2} \cdot (2x_j) \right)_j = -\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3} \\ \nabla \cdot \vec{v}(\vec{x}) &= -\sum_{j=1}^3 \left( \frac{1}{\|\vec{x}\|^3} - 3\frac{x_j^2}{\|\vec{x}\|^5} \right) = 0\end{aligned}$$

für  $\vec{x} \neq \vec{0}$ .

Nach dem Divergenzsatz ist also für  $G$  mit  $0 \notin \overline{G}$ :

$$\iint_{\partial G} \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3} \cdot d\vec{\sigma} = 0.$$

Wir halten außerdem fest, dass

$$\Delta \frac{1}{\|\vec{x}\|} = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}.$$

(6) Sei  $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$  mit  $\varphi = 0$  außerhalb einer Kugel  $G$  um  $\vec{0}$  mit Radius  $R$ . Wir wollen

$$\iiint_G \frac{1}{\|\vec{x}\|} \Delta \varphi \, d\tau = -4\pi \varphi(\vec{0})$$

zeigen. Da der Integrand für  $\vec{x} \rightarrow 0$  nicht beschränkt bleiben muss, verstehen wir unter der linken Seite

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iiint_{G_\varepsilon} \frac{1}{\|\vec{x}\|} \Delta \varphi \, d\tau,$$

wobei  $G_\varepsilon := G \setminus \{\|\vec{x}\| \leq \varepsilon\}$ . Für festes  $\varepsilon \in (0, R)$  ist jetzt nach der zweiten Greenschen Formel und nach (5):

$$\iiint_{G_\varepsilon} \frac{1}{\|\vec{x}\|} \Delta \varphi \, d\tau = \iint_{\|\vec{x}\|=\varepsilon} \frac{1}{\|\vec{x}\|} \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{N}} \, d\sigma - \iint_{\|\vec{x}\|=\varepsilon} \varphi \frac{-\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3} \cdot \vec{N} \, d\sigma.$$

Dabei beachte man, dass für  $\|\vec{x}\| = \varepsilon$  gilt:  $\vec{N} = -\vec{x}/\varepsilon$ . Also ist

$$-\iint_{\|\vec{x}\|=\varepsilon} \varphi \frac{-\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3} \cdot \vec{N} \, d\sigma = -\varepsilon^{-2} \iint_{\|\vec{x}\|=\varepsilon} \varphi \, d\sigma \rightarrow -4\pi \varphi(0) \quad (\varepsilon \rightarrow 0).$$

Andererseits ist  $\|\nabla \varphi\| \leq K$  für eine geeignete Konstante  $K$  und daher

$$\left| \iint_{\|\vec{x}\|=\varepsilon} \frac{1}{\|\vec{x}\|} \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{N}} \, d\sigma \right| \leq \frac{4\pi \varepsilon^2}{\varepsilon} K \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0).$$

**Interpretation:** Es gilt “ $\Delta \frac{1}{\|\vec{x}\|} = -4\pi\delta_{\vec{0}}$ ”, wenn wir gegen  $C^2$ -Funktionen  $\phi$  integrieren, die außerhalb einer Kugel  $G = K(\vec{0}, R)$  verschwinden. Dabei setzt man für solche  $\phi$ :

$$\iiint_G \left( \Delta \frac{1}{\|\vec{x}\|} \right) \phi \, d\tau := \iiint_G \frac{1}{\|\vec{x}\|} (\Delta \phi) \, d\tau,$$

was durch die zweite Greensche Formel in (3) oben gerechtfertigt ist (die Randterme verschwinden), und definiert

$$\iiint_G \phi \delta_{\vec{0}} \, d\tau := \phi(\vec{0}),$$

dh  $\delta_{\vec{0}}$  ist formal als eine “Dichte” mit Integral 1 zu verstehen, die im Punkt  $\vec{0}$  konzentriert ist.

Ende Di  
27.06.17

**Bemerkung:** Ähnlich kann man im  $\mathbb{R}^2$  zeigen, dass für  $g(x, y) := -\frac{1}{4\pi} \ln(x^2 + y^2)$  gilt:  $\Delta g = \delta_{(0,0)}$ .

**21.11. Satz über Parameterintegrale:** Sei  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $B \subseteq V$  ein Integrationsbereich (insbesondere ist also  $B$  abgeschlossen und beschränkt). Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes Intervall und  $f : I \times V, (t, \vec{x}) \mapsto f(t, \vec{x})$ , sei stetig und stetig partiell nach  $t$  differenzierbar. Dann ist die Funktion  $g : I \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto g(t) := \int_B f(t, \vec{x}) \, d\vec{x}$ , nach  $t$  stetig differenzierbar und

$$g'(t) = \int_B \partial_t f(t, \vec{x}) \, d\vec{x} \quad \text{für jedes } t \in I.$$

Ist  $f : I \times V \rightarrow \mathbb{R}$  nur stetig, so ist  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Diese Aussagen gelten auch für komplexwertige Funktionen.

*Beweis.* Wir zeigen die Differenzierbarkeit. Der Beweis für die Stetigkeit ist ähnlich. Sei  $t \in I$  fest und  $h \neq 0$  mit  $|h|$  klein. Dann gilt nach dem Hauptsatz aus HM1:

$$\begin{aligned} I(h) &:= \frac{g(t+h) - g(t)}{h} - \int_B \partial_t f(t, \vec{x}) \, d\vec{x} \\ &= \int_B \frac{f(t+h, \vec{x}) - f(t, \vec{x})}{h} - \partial_t f(t, \vec{x}) \, d\vec{x} \\ &= \int_B \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \partial_t f(\tau, \vec{x}) - \partial_t f(t, \vec{x}) \, d\tau \, d\vec{x}. \end{aligned}$$

Folglich ist

$$|I(h)| \leq \int_B 1 \, d\vec{x} \cdot \max_{\vec{x} \in B, \tau \in [t-|h|, t+|h|]} |(\partial_t f)(\tau, \vec{x}) - (\partial_t f)(t, \vec{x})|.$$

Dabei geht das Maximum für  $h \rightarrow 0$  gegen Null. Sonst gäbe es nämlich ein  $c > 0$  und Folgen  $(\tau_n)$  mit  $\tau_n \rightarrow t$  und  $(\vec{x}_n)$  in  $B$  mit

$$a_n := |(\partial_t f)(\tau_n, \vec{x}_n) - (\partial_t f)(t, \vec{x}_n)| \geq c$$

für jedes  $n \in \mathbb{N}$ . Da  $B$  abgeschlossen und beschränkt ist, finden wir eine Teilfolge  $(\vec{x}_{k(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $\vec{x}_{k(n)} \rightarrow \vec{x}_0 \in B$ . Aufgrund der Stetigkeit von  $\partial_t f$  haben wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\partial_t f)(\tau_{k(n)}, \vec{x}_{k(n)}) = (\partial_t f)(t, \vec{x}_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\partial_t f)(t, \vec{x}_{k(n)}),$$

also  $a_{k(n)} \rightarrow 0$  im Widerspruch zu  $a_{k(n)} \geq c$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .  $\square$

**21.12. Anwendung (Herleitung der Wärmeleitungsgleichung):** Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  ein Gebiet. Wir betrachten Wärmeleitung in  $\Omega$  und eine Funktion  $u = u(\vec{x}, t)$ , wobei  $t \in [0, T]$  und  $\vec{x} \in \Omega$ , welche die Temperaturverteilung beschreibt. Wir setzen voraus, dass das Medium in  $\Omega$  homogen ist. Für jedes Gebiet  $G \subseteq \Omega$  ist dann

$$\iiint_G u(\vec{x}, t) d\tau(\vec{x})$$

proportional zur Wärmeenergie in  $G$ . Energieerhaltung bedeutet also für ein glattes Gebiet  $G$ :

$$\frac{d}{dt} \iiint_G u(\vec{x}, t) d\tau(\vec{x}) = \underbrace{- \iint_{\partial G} \vec{j}(\vec{x}, t) \cdot \vec{N}(\vec{x}) d\sigma(\vec{x})}_{\text{Wärmetransport durch } \partial G} + \underbrace{\iiint_G f(\vec{x}, t) d\tau(\vec{x})}_{\text{Wärmequellen in } G},$$

wobei  $\vec{j}(\vec{x}, t)$  der Vektor des Wärmeflusses sei. Wenn  $u$  glatt genug ist, kann man nach 21.11 links Integral und  $\frac{d}{dt}$  vertauschen und erhält mit dem Divergenzatz:

$$\iiint_G \frac{\partial}{\partial t} u(\vec{x}, t) d\tau(\vec{x}) = - \iiint_G \operatorname{div} \vec{j}(\vec{x}, t) d\tau(\vec{x}) + \iiint_G f(\vec{x}, t) d\tau(\vec{x}).$$

Da  $G \subseteq \Omega$  sonst beliebig ist, geht dies nur, wenn gilt:

$$\frac{\partial}{\partial t} u(\vec{x}, t) = -\operatorname{div} \vec{j}(\vec{x}, t) + f(\vec{x}, t) \quad \text{für alle } (\vec{x}, t) \in \Omega \times (0, T).$$

Fouriers Gesetz besagt nun

$$\vec{j}(\vec{x}, t) = -c \nabla u(\vec{x}, t) \quad \text{für ein } c > 0,$$

dh dass sich die Wärme in Richtung des größten Temperaturgefälles ausbreitet und be-

tragsmäßig proportional zur Länge des Gradienten  $\nabla u(\vec{x}, t) = \begin{pmatrix} u_{x_1} \\ \vdots \\ u_{x_n} \end{pmatrix}(\vec{x}, t)$  ist. Zusammen

ergibt sich die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} u(\vec{x}, t) = c \Delta u(\vec{x}, t) + f(\vec{x}, t) \quad \text{für alle } (\vec{x}, t) \in \Omega \times (0, T),$$

wobei sich  $\Delta = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$  nur auf die räumlichen Variablen bezieht.

## 22 Grundzüge der Funktionentheorie

**22.1. Komplexe Differenzierbarkeit und Holomorphie:** Sei  $G \subseteq \mathbb{C}$  offen. Eine Funktion  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  heißt in  $z_0 \in G$  *komplex differenzierbar*, wenn der Limes

$$f'(z_0) := \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

in  $\mathbb{C}$  existiert. In diesem Fall heißt  $f'(z_0)$  die *komplexe Ableitung von  $f$  in  $z_0$* .

Die Funktion  $f$  heißt *holomorph* in  $G$ , falls  $f$  in **jedem**  $z_0 \in G$  komplex differenzierbar ist.

**Bemerkung:** Ist  $f$  in  $G$  holomorph, so ist  $f$  in  $G$  stetig.

**Beispiele:** (a)  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(z) = 1$  ist holomorph auf  $\mathbb{C}$  mit  $f'(z) = 0$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ .

(b)  $f(z) = z$  ist holomorph auf  $\mathbb{C}$  mit  $f'(z) = 1$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ .

(c)  $f(z) = e^z$  ist holomorph auf  $\mathbb{C}$  mit  $f'(z) = e^z$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ .

**22.2. Rechenregeln:** Sei  $G \subseteq \mathbb{C}$  offen und seien  $f, g : G \rightarrow \mathbb{C}$  in  $G$  holomorph. Dann sind  $f + g$ ,  $f \cdot g$  in  $G$  holomorph und

$$(f + g)'(z) = f'(z) + g'(z), \quad (f \cdot g)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z), \quad \text{für alle } z \in G.$$

Ist  $g \neq 0$  in  $G$ , so ist auch  $\frac{f}{g}$  holomorph in  $G$  und

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g(z)^2}, \quad z \in G.$$

Also: Summen-, Produkt- und Quotientenregel (solange der Nenner  $\neq 0$  ist) gelten auch für die komplexe Differenzierbarkeit. Ebenso gilt die Kettenregel auch für die komplexe Differenzierbarkeit. [Die Beweise lassen sich übertragen.]

**Beispiele:** (1)  $z \mapsto f(z) = z^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) ist holomorph auf  $\mathbb{C}$  mit  $f'(z) = nz^{n-1}$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ . Jedes Polynom  $P$  mit komplexen Koeffizienten ist auf  $\mathbb{C}$  holomorph.

(2)  $z \mapsto f(z) = z^{-n}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) ist holomorph auf  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  mit  $f'(z) = -nz^{-n-1}$  für alle  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Jede rationale Funktion  $z \mapsto f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ , wobei  $P, Q$  komplexe Polynome sind, ist holomorph in  $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : Q(z) = 0\}$ .

(3)  $z \mapsto f(z) = e^{1/z}$  ist in  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  holomorph mit  $f'(z) = e^{1/z}(-z^{-2})$  für  $z \neq 0$ .

**22.3. Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen:** Sei  $G \subseteq \mathbb{C}$  offen und  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ . Es gilt  $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ , und wir können  $G$  als offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^2$  betrachten. Durch  $u(x, y) := (\operatorname{Re} f)(x + iy)$  und  $v(x, y) = (\operatorname{Im} f)(x + iy)$  für  $x, y \in \mathbb{R}$  mit  $x + iy \in G$  erhält

man eine Funktion  $G \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $(x, y) \mapsto \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}$ , die man mit den Methoden von Kapitel 19 (mehrdimensionale Differentialrechnung) behandeln kann.

Ist  $f$  in  $z_0 = x_0 + iy_0 \in G$  komplex differenzierbar, so sieht man anhand der Definition (mit  $x + iy_0 \rightarrow x_0 + iy_0$ ):

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0).$$

Betrachtet man  $x_0 + iy \rightarrow x_0 + iy_0$ , erhält man

$$f'(z_0) = v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0),$$

so dass im Punkt  $(x_0, y_0)$  gilt:

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x.$$

Diese partiellen Differentialgleichungen heißen *Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen (CR-Dgln)* für  $u$  und  $v$ , die also auf  $G$  erfüllt sind, wenn  $f$  holomorph auf  $G$  ist. Umgekehrt gilt der

**Satz:** Ist  $(x, y) \mapsto \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}$  eine  $C^1$ -Funktion auf  $G$  und gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, so ist die durch  $f(x + iy) := u(x, y) + iv(x, y)$  definierte Funktion in  $G$  holomorph.

**Bemerkung:** Seien  $x, y, a, b \in \mathbb{R}$ . Die Multiplikation von  $x + iy$  mit der komplexen Zahl  $a + ib$  entspricht der Multiplikation des Vektors  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$  mit der Matrix  $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  (vgl. auch Beispiel 7) in 16.8). In diesem Sinne entspricht  $f'(z_0)$  der Matrix  $\begin{pmatrix} \operatorname{Re} f'(z_0) & -\operatorname{Im} f'(z_0) \\ \operatorname{Im} f'(z_0) & \operatorname{Re} f'(z_0) \end{pmatrix}$ . Die Ableitung im Sinne von Kapitel 19 (dh die Jacobimatrix) von  $(x, y) \mapsto \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}$  ist hingegen  $\begin{pmatrix} u_x(x_0, y_0) & u_y(x_0, y_0) \\ v_x(x_0, y_0) & v_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}$ . Beim Vergleich erhält man die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen.

**Beispiel:** Für die Funktion  $f(z) = \bar{z}$  gilt  $u(x, y) = x$ ,  $v(x, y) = -y$  und die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen sind nicht erfüllt. Die Funktion ist also nicht holomorph.

Ende Do  
29.06.17

**22.4. Potenzreihen:** Sei  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  eine Potenzreihe mit Konvergenzradius  $R \in (0, \infty]$  und Entwicklungspunkt  $z_0 \in \mathbb{C}$ . Dann ist die durch die Potenzreihe gegebene Funktion

$$f : K(z_0, R) \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n,$$

holomorph in  $K(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$  (beachte  $K(z_0, \infty) = \mathbb{C}$ ), und es gilt

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}, \quad |z - z_0| < R.$$

**Beispiele:** Die Funktionen  $z \mapsto \sin z$ ,  $z \mapsto \cos z$ ,  $z \mapsto \sinh z$ ,  $z \mapsto \cosh z$  sind auf  $\mathbb{C}$  holomorph.

**22.5. Komplexe Kurvenintegrale:** Eine *Kurve* ist hier eine stetige Abbildung  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ , für die es  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  so gibt, dass  $\gamma$  auf jedem Intervall  $[t_{j-1}, t_j]$ ,  $j = 1, \dots, n$ , stetig differenzierbar ist. Die Kurve  $\gamma$  heißt *einfach geschlossen*, falls  $\gamma(a) = \gamma(b)$  gilt und  $\gamma$  auf  $[a, b)$  injektiv ist. Eine einfach geschlossene Kurve heißt *positiv orientiert*, wenn das von  $\gamma$  umlaufene Gebiet links von  $\gamma$  liegt.

Dabei heißt  $\gamma$  in  $t_* \in [a, b]$  differenzierbar, falls der Limes

$$\dot{\gamma}(t_*) = \lim_{t \rightarrow t_*} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_*)}{t - t_*}$$

in  $\mathbb{C}$  existiert.

**Bemerkung:** Sei  $G \subseteq \mathbb{C}$  offen,  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und  $\gamma : [a, b] \rightarrow G$  differenzierbar. Dann ist  $f \circ \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  differenzierbar und

$$(f \circ \gamma)'(t) = f'(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t), \quad t \in [a, b].$$

**Definition:** Sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  eine Kurve und  $f : \gamma([a, b]) \rightarrow \mathbb{C}$  eine stetige Funktion. Dann definiert man das Kurvenintegral

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt,$$

wobei die rechte Seite als  $\sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt$  zu verstehen ist, wenn  $t_0, \dots, t_n$  wie oben in der Definition sind.

Das Integral ist invariant unter orientierungserhaltenden Umparametrisierungen und ändert das Vorzeichen bei Orientierungsumkehr.

**Abschätzung:** Sind  $f$  und  $\gamma$  wie in der Definition, so gilt

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq L(\gamma) \max\{|f(z)| : z \in \gamma([a, b])\},$$

wobei  $L(\gamma)$  die Länge von  $\gamma$  bezeichnet (siehe 19.6).

**Wichtiges Beispiel:** Sei  $r > 0$  und  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\gamma(t) = re^{it}$ . Dann ist  $\gamma$  eine einfach geschlossene, positiv orientierte Kurve, und es gilt  $\dot{\gamma}(t) = ire^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ . Sei  $f(z) = z^n$ , wobei  $n \in \mathbb{Z}$ . Dann gilt

$$\int_{\gamma} z^n dz = \int_0^{2\pi} (\gamma(t))^n \dot{\gamma}(t) dt = \int_0^{2\pi} r^n e^{itn} ir e^{it} dt = ir^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt.$$

Für  $n = -1$  ist das Kurvenintegral also  $= 2\pi i$ . Für  $n \neq -1$  erhalten wir

$$= ir^{n+1} \left[ \frac{e^{i(n+1)t}}{i(n+1)} \right]_0^{2\pi} = 0,$$

da  $e^{2\pi i(n+1)} = 1$ . Wir bemerken, dass  $f$  für  $n \geq 0$  auf  $\mathbb{C}$  holomorph ist und für  $n < 0$  nur auf  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  holomorph ist.

**22.6. Cauchyscher Integralsatz:** Sei  $G \subseteq \mathbb{C}$  offen und einfach zusammenhängend und  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Für jede einfach geschlossene, positiv orientierte Kurve  $\gamma : [a, b] \rightarrow G$  gilt dann

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Für den Begriff *einfach zusammenhängend* siehe 20.3, z.B. sind konvexe oder sternförmige Gebiete einfach zusammenhängend. Dabei heißt  $G \subseteq \mathbb{C}$  *konvex*, falls zu je zwei Punkten  $z_0, z_1 \in G$  auch die Verbindungsstrecke  $\{(1-t)z_0 + tz_1 : t \in [0, 1]\}$  in  $G$  enthalten ist.

**Beispiel:** Damit ist das Integral im Beispiel von 22.5  $= 0$  für  $n \geq 0$ .

**Bemerkungen zum Beweis:** Man überlegt sich zunächst, dass die Aussage äquivalent ist zur Existenz einer holomorphen Funktion  $F : G \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $F' = f$  auf  $G$  (es ist dann nämlich

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} F'(z) dz = \int_a^b F'(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt = \int_a^b (F \circ \gamma)'(t) dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0,$$

vergleiche mit 20.4, wo die Situation ähnlich ist).

Ist  $G$  konvex, so erhält man ein solches  $F$ , indem man  $z_* \in G$  fixiert und  $F(z) := \int_{S[z_*, z]} f(w) dw$  setzt. Gilt der Satz für "Dreiecke"  $\gamma$ , so hat man für  $z, z_0 \in G$ :

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - f(z_0) \right| &= \left| \frac{1}{z - z_0} \int_{S[z_0, z]} (f(w) - f(z_0)) dw \right| \\ &\leq \frac{1}{|z - z_0|} |z - z_0| \max\{|f(w) - f(z_0)| : w \in S[z_0, z]\} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

für  $z \rightarrow z_0$ , da  $f$  in  $z_0$  stetig ist.

Es reicht deshalb, die Aussage für “Dreiecke”  $\gamma$  zu zeigen (Satz von Cauchy-Goursat).

**Beispiele:** (1)  $\gamma(t) = e^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ ,  $f(z) = z^n$ , wobei  $n \in \mathbb{N}_0$  ist. Dann ist  $\int_{\gamma} z^n dz = 0$ , da  $f$  auf  $\mathbb{C}$  holomorph ist,  $\mathbb{C}$  konvex ist und  $\gamma$  einfach geschlossen.

(2) Sei  $\gamma$  wie eben und  $f(z) = e^z$ . Nach denselben Argumenten wie in (1) ist  $\int_{\gamma} e^z dz = 0$ .

(3)  $f(z) = 1/z$  ist in  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  holomorph, aber  $\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = 2\pi i \neq 0$ . Das Gebiet  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  ist nicht einfach zusammenhängend.

**22.7. Cauchysche Integralformel:** Sei  $G \subseteq \mathbb{C}$  offen und einfach zusammenhängend,  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und  $\gamma : [a, b] \rightarrow G$  eine einfach geschlossene, positiv orientierte Kurve. Dann gilt für jedes  $z_0$ , welches “innerhalb von  $\gamma$ ” liegt:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

**Beweisidee:** Man überlegt sich, dass 22.6 auch noch gilt, wenn die Funktion auf  $G$  stetig und in  $G \setminus \{z_0\}$  holomorph ist. Diese Variante von 22.6 wendet man auf die Funktion  $z \mapsto \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$  an und beachtet das Beispiel aus 22.5 für  $n = -1$ , wobei hier wegen 22.6 nur wichtig ist, dass  $z_0$  von  $\gamma$  einmal umlaufen wird:

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - f(z_0) \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz}_{=1}.$$

Ende M  
03.07.17

**Beispiele:** (1) Die Anwendung auf  $f(z) = 1$  gibt das Ergebnis von 22.5 im Fall  $n = -1$  (man nehme  $z_0 = 0$ ).

(2) Nimmt man  $f(z) = e^z$  und  $z_0 = 0$ , sowie  $\gamma(t) = e^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , so erhält man

$$\int_{\gamma} \frac{e^z}{z} dz = 2\pi i e^0 = 2\pi i.$$

**22.8. Folgerungen:** (a) Holomorphe Funktionen sind beliebig oft komplex differenzierbar. Unter den Voraussetzungen von 22.7 gilt

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

(b): Holomorphe Funktionen lassen sich lokal in **Potenzreihen** entwickeln. Ist  $G$  offen,  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und  $z_0 \in G$ , so gilt

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k, \quad |z - z_0| < R,$$



für jedes  $R > 0$  mit  $\{z : |z - z_0| < R\} \subseteq G$ . Die Reihe konvergiert dabei absolut und für jedes  $\rho \in (0, R)$  auf  $\{z : |z - z_0| \leq \rho\}$  gleichmäßig.

*Beweis.* (a) Man differenziere die rechte Seite von 22.7 direkt, wobei  $\gamma$  einen Kreis um  $z_0$  mit Radius  $\rho$  parametrisiere. Für  $|z - z_0| \leq \rho/2$  hat man dann

$$\begin{aligned} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2} d\zeta &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\zeta) \left( \frac{\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - z_0}}{z - z_0} - \frac{1}{(\zeta - z_0)^2} \right) d\zeta \\ &= (z - z_0) \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)^2} d\zeta, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2} d\zeta \right| &\leq |z - z_0| \cdot 2\pi\rho \cdot \frac{2}{\rho^3} \cdot \max\{|f(\zeta)| : |\zeta - z_0| = \rho\} \\ &\leq M|z - z_0| \rightarrow 0 \quad (z \rightarrow z_0), \end{aligned}$$

wobei die Konstante  $M \in (0, \infty)$  von  $\rho$  und  $f$  abhängt. Unter Verwendung von 22.6 erhält man die Formel für  $k = 1$ . Dieses Vorgehen kann man iterieren.

(b) Verwende die Formel in 22.7, wobei  $\gamma$  der Kreis um  $z_0$  mit Radius  $\rho$  ist und  $\{z : |z - z_0| \leq \rho\} \subseteq G$  gilt. Entwickle für  $\zeta$  auf  $\gamma$  den Integranden in eine geometrische Reihe

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{f(\zeta)}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} (z - z_0)^k.$$

Nun vertausche man Integration und Reihe (für  $|z - z_0| \leq \rho < R$  konvergiert die Reihe gleichmäßig) und verwende die Formel in (a).  $\square$

**22.9. Satz von Liouville:** Ist  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und beschränkt, so ist  $f$  konstant.

*Beweis.* Es gelte  $|f(z)| \leq M$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ . Wir schreiben nach 22.8:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Dabei haben wir für  $r > 0$  nach 22.8, falls  $\partial K(0, r)$  durch  $\gamma$  parametrisiert ist:

$$|a_k| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi r \cdot \frac{M}{r^{k+1}}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Für  $r \rightarrow \infty$  erhält man  $a_k = 0$ , wenn  $k \geq 1$ .  $\square$

**Anwendung:** Jedes komplexe Polynom  $P$  vom Grad  $n \geq 1$  hat eine Nullstelle in  $\mathbb{C}$  (Fundamentalsatz der Algebra).

*Beweis.* Es gilt  $P(z) \rightarrow \infty$  für  $|z| \rightarrow \infty$ . Hat  $P$  keine Nullstelle in  $\mathbb{C}$ , so ist  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(z) := 1/P(z)$ , holomorph mit  $f(z) \rightarrow 0$  für  $|z| \rightarrow \infty$ . Insbesondere ist  $f$  beschränkt und damit konstant. Dann ist aber auch  $P$  konstant im Widerspruch zur Voraussetzung.  $\square$

**22.10. Identitätssatz:** Sei  $G \subseteq \mathbb{C}$  ein Gebiet und  $f, g : G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Hat die Menge  $\{z \in G : f(z) = g(z)\}$  einen Häufungspunkt in  $G$ , so gilt  $f = g$  auf  $G$ .

*Beweis.* Ohne Einschränkung sei  $g = 0$ . Wir finden  $z_0 \in \mathbb{C}$  und eine Folge  $(z_n)$  in  $G \setminus \{z_0\}$  mit  $z_n \rightarrow z_0$  und  $f(z_n) = 0$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$ . Da  $f$  stetig in  $z_0$  stetig ist, folgt  $f(z_0) = 0$ . Wir schreiben

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

in einer Umgebung von  $z_0$  und haben soeben  $a_0 = 0$  gezeigt. Ist  $m \in \mathbb{N}$  und  $a_0, a_1, \dots, a_{m-1} = 0$  schon gezeigt, so ist

$$f(z) = \sum_{k=m}^{\infty} a_k (z - z_0)^k =: (z - z_0)^{m-1} g(z)$$

in einer Umgebung von  $z_0$  und  $g(z_n) = 0$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$ . Da  $g$  stetig in  $z_0$  ist, folgt  $g(z_0) = 0$ , i.e.  $a_m = 0$ .

Folglich sind alle Koeffizienten  $a_k = 0$ , und es ist  $f = 0$  auf einem Kreis um  $z_0$ . Verbinde ein beliebiges  $z \in G$  mit  $z_0$  durch einen Streckenzug in  $G$  und wiederhole das Argument entlang des Streckenzugs.  $\square$

Ende Di  
04.07.17

**22.11. Laurententwicklung:** Ist  $G \subseteq \mathbb{C}$  offen,  $z_0 \in G$  und  $f : G \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph, so heißt  $z_0$  eine *isolierte Singularität von  $f$* . Es gibt dann eindeutig bestimmte Koeffizienten  $a_k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , derart, dass gilt

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad 0 < |z - z_0| < R,$$

für jedes  $R > 0$  mit  $\{z : |z - z_0| < R\} \subseteq G$ . Konvergenz der Reihe ist zu verstehen als Konvergenz von  $\sum_{k=-\infty}^{-1}$  (*Hauptteil* der Reihe) und  $\sum_{k=0}^{\infty}$  (*Nebenteil* der Reihe). Die Reihe konvergiert dabei absolut und für alle  $0 < \rho_0 < \rho_1 < R$  auf  $\{z : \rho_0 \leq |z - z_0| \leq \rho_1\}$  gleichmäßig. Der Koeffizient  $a_{-1}$  heißt *Residuum von  $f$  in  $z_0$* , geschrieben

$$\text{res}(f; z_0) := a_{-1}.$$

Die isolierte Singularität  $z_0$  von  $f$  heißt *hebbare Singularität*, falls  $a_k = 0$  für alle  $k < 0$ , *Pol  $n$ -ter Ordnung*, falls  $a_{-n} \neq 0$  und  $a_k = 0$  für alle  $k < -n$  ist, und *wesentliche Singularität* sonst.

**Beweisidee zur Laurententwicklung:** Nur für  $z_0 = 0$ . Ist  $0 < \rho_0 < |z| < \rho_1 < R$ , so gilt wegen 22.7:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta =: f_1(z) - f_0(z),$$

wobei  $\gamma_j : [0, 2\pi] \rightarrow G$ ,  $\gamma_j(t) = \rho_j e^{it}$ . Die Funktionen  $f_1(z)$  und  $f_0(\frac{1}{z})$  lassen sich in Potenzreihen um 0 entwickeln, die für  $|z| < \rho_1$  bzw.  $|z| < 1/\rho_0$  konvergieren. Diese Potenzreihen ergeben Neben- und Hauptteil der Laurentreihe.

**Beispiele:** (1)  $f(z) = z^{-n}$ , wobei  $n \in \mathbb{N}$ , hat in  $z_0 = 0$  einen Pol  $n$ -ter Ordnung. Dabei gilt  $\text{res}(z^{-1}; 0) = 1$  und  $\text{res}(z^{-n}; 0) = 0$  für  $n \geq 2$ .

(2)  $f(z) = e^{2/z}$  hat in  $z_0 = 0$  eine wesentliche Singularität. Wegen  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k z^{-k}}{k!}$  für  $z \neq 0$  gilt  $\text{res}(f; 0) = 2$ .

(3)  $f(z) = \frac{1}{z^2-1} = \frac{1}{(z-1)(z+1)}$  hat in  $z = 1$  einen Pol erster Ordnung. Für  $0 < |z-1| < 2$  gilt

$$f(z) = \frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{z+1} = \frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z-1}{2}} = \frac{1}{2(z-1)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{z-1}{2}\right)^k = \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2^{k+2}} (z-1)^k,$$

also  $\text{res}(f; 1) = \frac{1}{2}$ .

**Bemerkung** (ohne Beweis): Sei  $z_0$  isolierte Singularität von  $f$ . Dann gilt:

$$z_0 \text{ ist hebbar} \iff \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \text{ existiert} \iff |f(z)| = O(1) \text{ für } z \rightarrow z_0,$$

$$z_0 \text{ ist Polstelle} \iff \lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty,$$

$$f \text{ hat in } z_0 \text{ einen Pol der Ordnung } n \iff \lim_{z \rightarrow z_0} |(z - z_0)^k f(z)| = \infty \text{ für } k = 1, \dots, n-1 \text{ und } |(z - z_0)^n f(z)| = O(1) \text{ für } z \rightarrow z_0.$$

Man kann also schon an  $\lim_{\mathbb{R} \ni x \rightarrow 0^+} e^{1/x} = \infty$ ,  $\lim_{\mathbb{R} \ni x \rightarrow 0^-} e^{1/x} = 0$  sehen, dass  $z \mapsto e^{1/z}$  in 0 eine wesentliche Singularität hat.

**22.12. Residuensatz:** Sei  $G \subseteq \mathbb{C}$  ein einfach zusammenhängendes Gebiet und  $\gamma : [a, b] \rightarrow G$  eine einfach geschlossene, positiv orientierte Kurve. Seien  $z_1, z_2, \dots, z_m \in G$  verschieden und innerhalb von  $\gamma$ , und sei  $f : G \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_m\} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Dann gilt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^m \text{res}(f; z_j).$$

*Beweis.* Mithilfe von 22.6 ist das Kurvenintegral links

$$= \sum_{j=1}^m \int_{\gamma_j} f(z) dz,$$

wobei  $\gamma_j$  jeweils ein kleiner Kreis um  $z_j$  ist, so dass man die Laurententwicklung von  $f$  um  $z_j$  verwenden kann. Dann vertauscht man Integral und Reihe (gleichmäßige Konvergenz!) und verwendet das Beispiel in 22.5.  $\square$

**22.13. Berechnung von Residuen:** (a) Besitzt  $f$  in  $z_0$  einen höchstens  $n$ -fachen Pol ( $n \in \mathbb{N}$ ), dann gilt

$$\operatorname{res}(f; z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \left( \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left( (z - z_0)^n f(z) \right) \right) \Big|_{z=z_0}.$$

*Beweis.* Unter diesen Voraussetzungen ist

$$f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{und} \quad g(z) := (z - z_0)^n f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k-n} (z - z_0)^k$$

für  $z \neq z_0$  in einer Umgebung von  $z_0$ . Vergleich mit der Potenzreihe von  $g(z)$  ergibt  $a_{-1} = \frac{g^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!}$ .  $\square$

(b) Ist  $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$  mit  $g, h : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph,  $z_0 \in U$  und  $g(z_0) \neq 0$ ,  $h(z_0) = 0$ ,  $h'(z_0) \neq 0$ , so gilt

$$\operatorname{res}(f; z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

*Beweis.* Unter den gegebenen Voraussetzungen ist  $z_0$  einfache Nullstelle von  $h(z)$ , also ist  $z_0$  hebbare Singularität von  $(z - z_0)f(z)$ . Damit ist  $z_0$  einfache Polstelle von  $f$  und (a) ergibt die angegebene Formel.  $\square$

Ende Do  
06.07.17

**Beispiele:** (1) Sei  $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ . Da  $z \mapsto z^2 + 1 = (z + i)(z - i)$  einfache Nullstellen in  $i$  und  $-i$  hat, hat  $f$  einfache Polstellen in  $i$  und  $-i$ . Wir erhalten

$$\operatorname{res}(f; i) = \lim_{z \rightarrow i} (z - i)f(z) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{z + i} = \frac{1}{2i} \quad \text{und} \quad \operatorname{res}(f; -i) = \lim_{z \rightarrow -i} (z + i)f(z) = -\frac{1}{2i}.$$

Ist also  $\gamma(t) = 2e^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , so gilt nach dem Residuensatz

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z^2 + 1} dz = 2\pi i (\operatorname{res}(f; i) + \operatorname{res}(f; -i)) = 0.$$

(2) Für  $\gamma$  aus (1), aber  $f(z) = \frac{e^z}{z^2+1}$  erhält man

$$\int_{\gamma} \frac{e^z}{z^2+1} dz = 2\pi i \frac{e^i - e^{-i}}{2i} = 2\pi i \sin 1.$$

**22.14. Komplexe Partialbruchzerlegung:** Seien  $P(z), Q(z)$  komplexe Polynome mit  $\text{Grad } P < \text{Grad } Q = n \geq 2$ . Dann existieren *verschiedene*  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$  und  $k_1, k_2, \dots, k_m \in \mathbb{N}$  mit  $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$  und

$$Q(z) = \mu(z - \lambda_1)^{k_1} \cdot (z - \lambda_2)^{k_2} \cdot \dots \cdot (z - \lambda_m)^{k_m},$$

wobei  $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . [Die  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  sind die *verschiedenen* komplexen Nullstellen von  $Q(z)$  und  $k_1, k_2, \dots, k_m$  deren jeweilige Vielfachheiten.] Es gibt dann komplexe Koeffizienten  $\alpha_l^{(j)}$  ( $j = 1, \dots, m, l = 1, \dots, k_j$ ) so, dass

$$\begin{aligned} \frac{P(z)}{Q(z)} &= \frac{\alpha_1^{(1)}}{z - \lambda_1} + \frac{\alpha_2^{(1)}}{(z - \lambda_1)^2} + \dots + \frac{\alpha_{k_1}^{(1)}}{(z - \lambda_1)^{k_1}} + \\ &+ \frac{\alpha_1^{(2)}}{z - \lambda_2} + \frac{\alpha_2^{(2)}}{(z - \lambda_2)^2} + \dots + \frac{\alpha_{k_2}^{(2)}}{(z - \lambda_2)^{k_2}} + \\ &+ \dots + \\ &+ \frac{\alpha_1^{(m)}}{z - \lambda_m} + \frac{\alpha_2^{(m)}}{(z - \lambda_m)^2} + \dots + \frac{\alpha_{k_m}^{(m)}}{(z - \lambda_m)^{k_m}}. \end{aligned}$$

M.a.W.  $\frac{P(z)}{Q(z)}$  ist eine Linearkombination der Funktionen  $\frac{1}{(z - \lambda_j)^l}$  ( $j = 1, \dots, m, l = 1, \dots, k_j$ ). Für die Koeffizienten höchster Ordnung hat man etwa

$$\alpha_{k_j}^{(j)} = \lim_{z \rightarrow \lambda_j} (z - \lambda_j)^{k_j} \frac{P(z)}{Q(z)}, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

**Beispiel:**

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{1}{z(z^2+1)} = \frac{1}{z(z-i)(z+i)} \stackrel{!}{=} \frac{A}{z} + \frac{B}{z-i} + \frac{C}{z+i}.$$

Hier sind  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = i, \lambda_3 = -i, k_1 = k_2 = k_3 = 1$  und

$$A = \frac{1}{(0-i)(0+i)} = 1, \quad B = \frac{1}{i(i+i)} = -\frac{1}{2}, \quad C = \frac{1}{-i(-i-i)} = -\frac{1}{2}.$$

Also ist

$$\frac{1}{z(z^2+1)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2} \frac{1}{z-i} - \frac{1}{2} \frac{1}{z+i}.$$

**22.15. Logarithmus und allgemeine Potenz:** Jede komplexe Zahl  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  kann man schreiben als  $z = |z|e^{i\varphi}$ . Dabei heißt  $\varphi$  *Argument* von  $z$ , geschrieben  $\arg z$ . Das Argument ist **nicht eindeutig**: Ist  $\varphi$  ein Argument von  $z$ , so auch  $\varphi + 2k\pi$ , wobei  $k \in \mathbb{Z}$ .

Der *Hauptzweig des Arguments*  $\text{Arg } z$  nimmt für  $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$  Werte in  $(-\pi, \pi)$  an.

**Definition:** Der *Hauptzweig Log des Logarithmus* ist gegeben durch

$$\text{Log } z := \ln |z| + i\text{Arg } z, \quad z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0].$$

Andere Zweige des Logarithmus erhält man, indem man andere Zweige des Arguments betrachtet.

**Bemerkung:**  $\text{Log} : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \rightarrow \{w \in \mathbb{C} : |\text{Im } w| < \pi\}$  ist holomorph und bijektiv mit Umkehrabbildung  $\exp$ . Es gilt

$$\text{Log}' z = \frac{1}{z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0].$$

**Allgemeine Potenz:** Für  $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$  und  $\alpha \in \mathbb{C}$  definiert man durch

$$z^\alpha := \exp(\alpha \text{Log } z)$$

den *Hauptzweig* der  $\alpha$ -ten Potenz. Die Funktion  $z \mapsto z^\alpha$  ist dann auf  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$  holomorph

**Wurzeln:** Für  $n \in \mathbb{N}$  erhält man für den Hauptzweig der  $n$ -ten Wurzel

$$z^{1/n} = |z|^{1/n} \exp(i\text{Arg } z/n), \quad z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0].$$

Berücksichtigt man die anderen Werte des Arguments, so sieht man, dass jede komplexe Zahl  $z \neq 0$  genau  $n$  verschiedene  $n$ -te Wurzeln besitzt.

**22.16. Satz von der Gebietstreue und Maximumsprinzip:** (a) Ist  $G \subseteq \mathbb{C}$  ein Gebiet und  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und nicht konstant, so ist  $f(G) \subseteq \mathbb{C}$  wieder ein Gebiet.

(b) Sei  $G \subseteq \mathbb{C}$  ein Gebiet und  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Hat  $z \mapsto |f(z)|$  in  $z_0 \in G$  ein lokales Maximum, so ist  $f$  konstant.

Ende M  
10.07.17

**22.17. Konforme Abbildungen:** Sei  $G \subseteq \mathbb{C}$  ein Gebiet. Eine injektive holomorphe Abbildung  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $f'(z) \neq 0$  für alle  $z \in G$  ist *winkeltreu*: Sind  $\gamma, \psi : [-1, 1] \rightarrow G$  stetig differenzierbare reguläre Kurven mit  $\gamma(0) = z_0 = \psi(0)$ , die sich in  $z_0$  im Winkel  $\varphi$  schneiden, so schneiden sich die Bildkurven  $f \circ \gamma$  und  $f \circ \psi$  in  $f(z_0)$  ebenfalls im Winkel  $\varphi$ .

Solche Abbildungen heißen auch *konform*. [Man kann zeigen, dass Injektivität von  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  die Bedingung  $f' \neq 0$  auf  $G$  impliziert.]

**Anwendung:** In der zweidimensionalen Elektrostatik schneiden sich Feldlinien und Äquipotentiallinien im rechten Winkel. Diese Beziehung bleibt unter konformen Abbildungen erhalten.

**22.18. Möbiustransformationen:** Sind  $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  und  $b \in \mathbb{C}$ , so bilden die holomorphen Funktionen  $z \mapsto az$  (Drehstreckung) und  $z \mapsto z+b$  (Translation) die komplexe Zahlenebene bijektiv auf sich selbst ab. Außerdem werden Geraden auf Geraden und Kreise auf Kreise abgebildet.

Die Funktion  $z \mapsto \frac{1}{z}$  (Inversion) bildet  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  bijektiv auf sich selbst ab. Geraden durch Null werden auf Geraden durch Null abgebildet; Kreise durch Null werden auf Geraden, die nicht durch Null gehen, abgebildet (und umgekehrt); Kreise, die nicht durch Null gehen, werden auf Kreise, die nicht durch Null gehen, abgebildet.

**Idee:** Man schreibe Geraden- und Kreisgleichung geeignet um.

Es ist hier sinnvoll, zur komplexen Ebene  $\mathbb{C}$  einen Punkt  $\infty$  hinzuzunehmen und  $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  zu betrachten, wobei man setzt  $\frac{1}{\infty} := 0$  und  $\frac{1}{0} := \infty$ . Außerdem bezeichnet man Kreise und Geraden als *verallgemeinerte Kreise*.

**Definition:** Eine *Möbiustransformation*  $T$  hat die Form  $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ , wobei  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  mit  $ad - bc \neq 0$ .

**Eigenschaften:**

- (1) Jede Möbiustransformation bildet  $\hat{\mathbb{C}}$  bijektiv auf  $\hat{\mathbb{C}}$  ab.
- (2) Jede Möbiustransformation lässt sich schreiben als Hintereinanderausführung von Drehstreckungen, Translationen und Inversionen.
- (3) Die Menge der Möbiustransformationen ist eine Gruppe bzgl. der Komposition.
- (4) Jede Möbiustransformation bildet verallgemeinerte Kreise auf verallgemeinerte Kreise ab.
- (5) Jede Möbiustransformation ist durch das Bild von drei verschiedenen Punkten aus  $\hat{\mathbb{C}}$  eindeutig bestimmt.

**Beispiel:** Die Möbiustransformation  $T$  mit  $T(1) = \infty$ ,  $T(0) = 1$  und  $T(-1) = 0$  ist gegeben durch  $T(z) = \frac{1+z}{1-z}$ .  $T$  bildet das Innere des Einheitskreises auf die rechte Halbebene und die Einheitskreislinie auf die imaginäre Achse ab.

**22.19. Harmonische Funktionen:** Sei  $G \subseteq \mathbb{C}$  ein Gebiet und  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Dann sind  $u := \operatorname{Re} f$  und  $v := \operatorname{Im} f$  *harmonische Funktionen* in  $G$ , dh es gilt

$$\Delta u = 0, \quad \Delta v = 0 \quad \text{in } G.$$

Zum Beweis beachte man, dass  $u, v \in C^\infty$  gilt, und die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen.

**Bemerkung:** Umgekehrt ist jede harmonische  $C^2$ -Funktion  $u : G \rightarrow \mathbb{R}$  lokal der Realteil einer holomorphen Funktion. Auf  $G$  gilt das i.a. nur dann, wenn  $G$  einfach zusammenhängend ist. Beachte dazu, dass in diesem Fall  $\begin{pmatrix} -u_y \\ u_x \end{pmatrix}$  ein Potentialfeld  $\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$  auf  $G$  ist. Nach den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen ist dann die  $C^2$ -Funktion  $u + iv$  auf  $G$  holomorph.

**Beispiel:** Die durch  $u(x, y) := \log(x^2 + y^2)$  auf  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} = \mathbb{C} \setminus \{0\} = G$  definierte Funktion ist harmonisch in  $G$ . Eine zugehörige Funktion  $v : G \rightarrow \mathbb{R}$  findet man jedoch nicht (vgl. 22.15).

Ende Di  
11.07.17



## 23 Fourierreihen

Ziel dieses Abschnitts ist es, periodische Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $t \mapsto f(t)$ , der Periodenlänge  $T > 0$  (man denke etwa an ein periodisches Audiosignal) als Überlagerung von  $T$ -periodischen “reinen” Schwingungen  $t \mapsto e^{i\omega t}$  darzustellen. Die “Frequenzen”  $\omega$  sind dann von der Form  $\omega = \frac{2\pi k}{T}$ , wobei  $k \in \mathbb{Z}$ . Für  $k = 0$  hat man einen konstanten Anteil, die anderen Frequenzen sind ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz  $\frac{2\pi}{T}$  (Tonhöhe). Die Anteile der Oberschwingungen bestimmen die Klangfarbe.

Die Idee geht zurück auf Fourier (1822): “Jede  $2\pi$ -periodische Funktion  $f$  lässt sich darstellen als Reihe  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikt}$ .”

Es hat einige Zeit gedauert, diese Idee zu präzisieren (Funktionsbegriff, geeigneter Integralbegriff, verschiedene Konvergenzbegriffe etc). Wir kümmern uns hier um die Fragen, wie man die  $c_k$  aus  $f$  erhält und für welche  $f$  man eine punktweise Konvergenz der Fourierreihe hat.

**23.1.  $T$ -periodische Funktionen:** Sei  $T > 0$ . Eine Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  heißt  $T$ -periodisch, falls  $f(t + T) = f(t)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  gilt.

Es gilt dann auch  $f(t + kT) = f(t)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  und alle  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Bemerkung:** (a) Eine  $T$ -periodische Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  ist eindeutig bestimmt, wenn man ihre Werte auf einem Intervall  $[a, a + T)$  kennt (hierbei ist  $a \in \mathbb{R}$  beliebig). Jede Funktion  $\tilde{f} : [a, a + T) \rightarrow \mathbb{C}$  lässt sich eindeutig zu einer  $T$ -periodischen Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $f = \tilde{f}$  auf  $[a, a + T)$  fortsetzen.

(b) Ist  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  eine  $T$ -periodische Funktion, so ist  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , definiert durch  $g(t) := f\left(\frac{T}{2\pi}t\right)$ , eine  $2\pi$ -periodische Funktion. Es ist dann nämlich für  $t \in \mathbb{R}$ :

$$g(t + 2\pi) = f\left(\frac{T}{2\pi}(t + 2\pi)\right) = f\left(\frac{T}{2\pi}t + T\right) = f\left(\frac{T}{2\pi}t\right) = g(t).$$

Wir werden uns deshalb i.w. auf  $2\pi$ -periodische Funktionen beschränken.

**Beispiele:**  $\sin$ ,  $\cos$  und  $t \mapsto e^{it}$  sind  $2\pi$ -periodische Funktionen. Die Funktion  $t \mapsto \cos(2t)$  ist  $2\pi$ -periodisch, aber auch  $\pi$ -periodisch.

**23.2. Integration und Differentiation komplexwertiger Funktionen:** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  eine Funktion. Für jedes  $t \in [a, b]$  ist  $f(t)$  eine komplexe Zahl mit Real- und Imaginärteil. Durch  $u(t) := \operatorname{Re}(f(t))$  und  $v(t) := \operatorname{Im}(f(t))$  werden Funktionen  $u, v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definiert mit  $f(t) = u(t) + iv(t)$  für alle  $t \in [a, b]$  (Bezeichnungen  $u =: \operatorname{Re} f$ ,  $v =: \operatorname{Im} f$ ).

Die Funktion  $f$  heißt (Riemann-)integrierbar, falls  $u$  **und**  $v$  integrierbar sind. In diesem Falle setzen wir

$$\int_a^b f(t) dt := \int_a^b u(t) dt + i \int_a^b v(t) dt.$$

Das Integral ist  $\mathbb{C}$ -linear, dh: Ist  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  eine weitere integrierbare Funktion und sind  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ , so ist  $\alpha f + \beta g$  integrierbar und es gilt

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) dt = \alpha \int_a^b f dt + \beta \int_a^b g dt.$$

Uneigentliche Integrale erklärt man entsprechend.

Analog heißt  $f$  differenzierbar in  $t_0 \in [a, b]$ , falls  $u$  **und**  $v$  differenzierbar in  $t_0$  sind, und in diesem Falle ist  $f'(t_0) := u'(t_0) + iv'(t_0)$  die *Ableitung von  $f$  in  $t_0$* .

Auch die Ableitung ist  $\mathbb{C}$ -linear. Es gelten die Produkt-, Quotienten- und die Kettenregel, wobei in der Kettenregel für  $f \circ g$  die Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  komplexwertig ist, aber  $g : [c, d] \rightarrow [a, b]$  reellwertig.

**Folgerung:** Der Hauptsatz gilt für komplexwertige Funktionen. Weiter gelten die Regeln der partiellen Integration und der Substitution.

**Erinnerung:** Für  $w = u + iv \in \mathbb{C}$  mit  $u, v \in \mathbb{R}$  ist

$$e^w = e^{u+iv} = e^u e^{iv} = e^u (\cos v + i \sin v), \quad |e^w| = |e^u| |e^{iv}| = e^u = e^{\operatorname{Re} w}.$$

**Beispiele:** (1) Für  $w = u + iv \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  mit  $u, v \in \mathbb{R}$  und  $a < b$  gilt

$$\int_a^b e^{wt} dt = \frac{e^{wb} - e^{wa}}{w}.$$

Wegen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e^{wt} &= \frac{d}{dt} (e^{ut} (\cos(vt) + i \sin(vt))) = u e^{ut} (\cos(vt) + i \sin(vt)) + e^{ut} (-v \sin(vt) + iv \cos(vt)) \\ &= (u + iv) e^{ut} (\cos(vt) + i \sin(vt)) = w e^{wt} \end{aligned}$$

folgt das aus dem Hauptsatz.

(2) Ist  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  eine  $2\pi$ -periodische Funktion, die über beschränkten Intervallen integrierbar ist, so gilt für jedes  $a \in \mathbb{R}$ :

$$\int_0^{2\pi} f(t) dt = \int_a^{a+2\pi} f(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt.$$

Wir werden  $2\pi$ -periodische Funktionen meist auf  $[-\pi, \pi)$  betrachten und über dieses Intervall integrieren.

(3) Für  $l, k \in \mathbb{Z}$  gilt

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt} e^{-ilt} dt = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-l)t} dt = \begin{cases} 2\pi & , k = l \\ 0 & , k \neq l \end{cases}.$$

**23.3. Trigonometrische Polynome:** Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Eine  $2\pi$ -periodische Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  heißt *trigonometrisches Polynom vom Grad  $\leq n \in \mathbb{N}$* , falls es Koeffizienten  $c_k \in \mathbb{C}$ ,  $|k| \leq n$ , gibt mit

$$f(t) = \sum_{|k| \leq n} c_k e^{ikt}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Für ein solches  $f$  und  $l \in \mathbb{Z}$  gilt dann nach Beispiel 23.2 (3):

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ilt} dt = \sum_{|k| \leq n} c_k \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt} e^{-ilt} dt = \begin{cases} 2\pi c_l & , |l| \leq n \\ 0 & , |l| > n \end{cases}.$$

**Bemerkung:** Für  $k \in \mathbb{N}$  gilt

$$c_k e^{ikt} + c_{-k} e^{-ikt} = (c_k + c_{-k}) \cos(kt) + i(c_k - c_{-k}) \sin(kt), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Man kann also statt mit  $e^{ikt}$  für  $|k| \leq n$  auch mit  $\sin(kt), \cos(kt)$  für  $1 \leq k \leq n$  bzw.  $0 \leq k \leq n$  arbeiten.

**23.4. Fourierkoeffizienten einer Funktion:** Sei  $f : [-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{C}$  integrierbar. Für jedes  $k \in \mathbb{Z}$  heißt

$$\hat{f}(k) := c_k(f) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt$$

der  $k$ -te *Fourierkoeffizient*, und  $(\hat{f}(k))_{k \in \mathbb{Z}}$  heißt *Folge der Fourierkoeffizienten von  $f$* .

**Bemerkung:** Man verwendet außerdem gelegentlich für  $k \in \mathbb{N}_0$  bzw.  $k \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned} a_k(f) &:= c_k(f) + c_{-k}(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt \\ b_k(f) &:= i(c_k(f) - c_{-k}(f)) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) dt. \end{aligned}$$

Ist  $f$  reellwertig, so sind  $(a_k(f))_{k \in \mathbb{N}_0}, (b_k(f))_{k \in \mathbb{N}}$  reelle Folgen. Man hat (vergleiche Bemerkung in 23.3)

$$\sum_{|k| \leq n} c_k(f) e^{ikt} = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^n a_k(f) \cos(kt) + \sum_{k=1}^n b_k(f) \sin(kt),$$

und es gilt  $c_0(f) = a_0(f)/2$ , sowie für  $k \in \mathbb{N}$ :

$$c_k(f) = \frac{a_k(f) - ib_k(f)}{2}, \quad c_{-k}(f) = \frac{a_k(f) + ib_k(f)}{2}.$$

**Beispiele:** (1) Wir betrachten die  $2\pi$ -periodische Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , die durch  $f(t) := t$  für  $t \in [-\pi, \pi)$  definiert ist. Es gilt  $\hat{f}(0) = 0$ . Für  $k \neq 0$  ist

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t e^{-ikt} dt = \frac{1}{2\pi} \frac{t}{-ik} e^{-ikt} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{-ik} e^{-ikt} dt}_{=0} = \frac{(-1)^k i}{k}.$$

(2) Sei die  $2\pi$ -periodische Funktion  $f$  auf  $[-\pi, \pi)$  gegeben durch  $f(t) = t^2$ . Für  $k = 0$  ist

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{3} t^3 \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^2}{3}.$$

Für  $k \neq 0$  ist

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 e^{-ikt} dt = \underbrace{\frac{t^2}{2\pi} \frac{1}{-ik} e^{-ikt} \Big|_{-\pi}^{\pi}}_{=0} + \frac{2}{2\pi ik} \int_{-\pi}^{\pi} t e^{-ikt} dt = \frac{2}{ik} \frac{(-1)^k i}{k} = \frac{2(-1)^k}{k^2}.$$

**23.5. Stückweise stetige und stückweise glatte Funktionen:** Eine  $2\pi$ -periodische Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  heißt

(a) *stückweise stetig*, falls es

$$-\pi = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = \pi$$

so gibt, dass für jedes  $j = 0, \dots, n-1$  gilt:

(i)  $f : (t_j, t_{j+1}) \rightarrow \mathbb{C}$  ist stetig,

(ii) die einseitigen Grenzwerte

$$f(t_j+) = \lim_{t \rightarrow t_j+} f(t) \quad \text{und} \quad f(t_{j+1}-) = \lim_{t \rightarrow t_{j+1}-} f(t)$$

existieren in  $\mathbb{C}$ .

(b) *stückweise glatt*, falls es

$$-\pi = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = \pi$$

so gibt, dass für jedes  $j = 0, \dots, n-1$  gilt:

(i)  $f : (t_j, t_{j+1}) \rightarrow \mathbb{C}$  ist stetig differenzierbar,

(ii) die einseitigen Grenzwerte  $f(t_j+)$ ,  $f(t_{j+1}-)$  und

$$f'(t_j+) = \lim_{t \rightarrow t_j+} f'(t), \quad f'(t_{j+1}-) = \lim_{t \rightarrow t_{j+1}-} f'(t)$$

existieren in  $\mathbb{C}$ .

In den Punkten  $t_j$  muss  $f$  nicht stetig sein, der Funktionswert  $f(t_j)$  spielt keine Rolle.

**Bemerkung:** Ist  $f$  stetig, so ist  $f$  stückweise stetig. Ist  $f$  stetig differenzierbar, so ist  $f$  stückweise glatt.

Ist  $f$  stückweise stetig, so existieren in jedem Punkt  $t \in \mathbb{R}$  die einseitigen Grenzwerte  $f(t+)$  und  $f(t-)$ .

**Beispiele:** (1) Die Funktionen in den Beispielen 23.4(1) und (2) sind stückweise glatt.

(2) Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$   $2\pi$ -periodisch mit  $f(t) = \begin{cases} 1 & , t \in [0, \pi) \\ -1 & , t \in [-\pi, 0) \end{cases}$  Dann ist  $f$  stückweise glatt.

**23.6. Darstellungssatz für  $2\pi$ -periodische Funktionen:** Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$   $2\pi$ -periodisch und stückweise glatt. Dann gilt für jedes  $t \in \mathbb{R}$ :

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)e^{ikt} := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n \hat{f}(k)e^{ikt} = \frac{f(t+) + f(t-)}{2}.$$

Ist  $f$  stetig in  $t$ , so konvergiert die Fourierreihe gegen  $f(t)$ . (ohne Beweis)

Ende Do

**Beispiele:** (1) Für die  $2\pi$ -periodische Funktion  $f$  mit  $f(t) = t$  für  $t \in [-\pi, \pi)$  gilt nach Beispiel 23.4(1)  $\hat{f}(k) = (-1)^k i/k$  für  $k \geq 1$ . Weiter ist 13.07.17

$$\sum_{|k| \leq n} \hat{f}(k)e^{ikt} = \sum_{0 < |k| \leq n} \frac{(-1)^k i}{k} (\cos(kt) + i \sin(kt)) = \sum_{k=1}^n \frac{2(-1)^{k+1}}{k} \sin(kt),$$

also

$$t = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin(kt), \quad t \in (-\pi, \pi),$$

da  $f$  in diesen Punkten stetig ist.

An der Stelle  $t = \pi$  ist  $f$  unstetig. Setzt man  $t = \pi$  in die Reihe rechts ein, so erhält man den Wert 0. In der Tat ist  $f(\pi-) = \pi$ ,  $f(\pi+) = f(-\pi+) = -\pi$  und also  $\frac{f(\pi+) + f(\pi-)}{2} = 0$ .

(2) Für die  $2\pi$ -periodische Funktion  $f$  mit  $f(t) = t^2$  für  $t \in [-\pi, \pi)$  gilt nach Beispiel 23.4(2):

$$\hat{f}(0) = \frac{\pi^2}{3}, \quad \hat{f}(k) = \frac{2(-1)^k}{k^2}, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Da  $f$  stetig und stückweise glatt ist, gilt nach Satz 23.6:

$$t^2 = \frac{\pi^2}{3} + 2 \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} e^{ikt}, \quad \text{für alle } t \in [-\pi, \pi].$$

Insbesondere erhält man für  $t = \pi$ :

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

**Bemerkung:** Der Darstellungssatz legt es nahe, für stückweise stetige (und damit insbesondere für stückweise glatte Funktionen) die folgende *Normalisierung* zu betrachten:

Ist  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$   $2\pi$ -periodisch und stückweise stetig mit  $-\pi = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \pi$  wie in 23.5 (a), so heißt  $f$  *normalisiert*, wenn  $f(t_j) = \frac{f(t_j+) + f(t_j-)}{2}$  für  $j = 1, \dots, n$  gilt. Es gilt dann  $f(t) = \frac{f(t+) + f(t-)}{2}$  für jedes  $t \in \mathbb{R}$ .

Durch eventuelles Abändern der Funktionswerte  $f(t_j)$  lässt sich jede stückweise stetige Funktion normalisieren. Die Fourierkoeffizienten ändern sich dabei nicht.

Ist also  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$   $2\pi$ -periodisch, stückweise glatt und normalisiert, so gilt für jedes  $t \in \mathbb{R}$ :

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikt} = f(t).$$

**23.7. Konvergenz im quadratischen Mittel:** Durch

$$(f|g) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{g(t)} dt$$

wird auf  $C([-\pi, \pi], \mathbb{C})$  ein Skalarprodukt definiert, also auch auf

$$C_{\text{per}}([-\pi, \pi], \mathbb{C}) := \{f \in C([-\pi, \pi], \mathbb{C}) : f(\pi) = f(-\pi)\}.$$

Wir können diesen Raum mit  $\{f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{C}) : f \text{ ist } 2\pi\text{-periodisch}\}$  identifizieren (vergleiche mit 23.1 Bemerkung (a)).

Bezeichnen wir für  $k \in \mathbb{Z}$  die Funktion  $t \mapsto e^{ikt}$  mit  $e_k$ , so bedeutet (3), dass  $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  ein *Orthonormalsystem* in  $C_{\text{per}}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$  ist.

**Satz 1:** Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt und  $\dim V = \infty$ . Sei  $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$  ein Orthonormalsystem in  $V$ , dh  $(e_k | e_l) = \delta_{kl}$  für alle  $k, l \in \mathbb{N}$ . Für jedes  $v \in V$  gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(v | e_k)|^2 \leq \|v\|^2 \quad (\text{Besselsche Ungleichung}),$$

und es sind äquivalent:

- (i)  $\sum_{k=1}^{\infty} |(v|e_k)|^2 = \|v\|^2$ ,
- (ii)  $\|v - \sum_{k=1}^n (v|e_k)e_k\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$ .

Gilt (i) (oder (ii)) für jedes  $v \in V$ , so heißt das Orthonormalsystem  $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$  *vollständig* in  $V$ . Man hat dann auch

$$(v|w) = \sum_{k=1}^{\infty} (v|e_k) \overline{(w|e_k)} \quad \text{für alle } v, w \in V.$$

*Beweis.* Der Zusatz folgt durch sogenannte *Polarisation* aus (i) ( $\rightarrow$  Literatur). Für jedes  $v \in V$  gilt:

$$\begin{aligned} 0 \leq \|v - \sum_{k=1}^n (v|e_k)e_k\|^2 &= \|v\|^2 + \sum_{k=1}^n |(v|e_k)|^2 - 2\operatorname{Re} \left( v \left| \sum_{k=1}^n (v|e_k)e_k \right. \right) \\ &= \|v\|^2 + \sum_{k=1}^n |(v|e_k)|^2 - 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^n (v|e_k) \overline{(v|e_k)} \\ &= \|v\|^2 - \sum_{k=1}^n |(v|e_k)|^2. \end{aligned}$$

Daraus folgt die Besselsche Ungleichung, und (i) und (ii) sind äquivalent. □

**Satz 2:** Für jedes  $f \in C_{\text{per}}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$  gilt:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|^2 = \|f\|^2 \quad \text{und} \quad \|f - \sum_{|k| \leq n} \hat{f}(k)e_k\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Insbesondere ist  $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  ein vollständiges Orthonormalsystem in  $C_{\text{per}}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ .

*Beweis.* 1) Sei zunächst  $f$  stetig differenzierbar mit  $f, f' \in C_{\text{per}}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ . Dann gilt für  $k \neq 0$ :  $\hat{f}(k) = \frac{1}{ik} \widehat{(f')}(k)$ . Insbesondere folgt mithilfe der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |\hat{f}(k)| \leq \left( \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \left( \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |\widehat{(f')}(k)|^2 \right)^{1/2} < \infty.$$

Die Reihe  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)e_k$  konvergiert auf  $[-\pi, \pi]$  gleichmäßig gegen ein  $g \in C_{\text{per}}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ . Da  $f$  stetig und stückweise glatt ist, konvergiert diese Reihe nach 23.6 aber punktweise gegen  $f$ . Also ist  $g = f$  und

$$\|f - \sum_{|k| \leq n} \hat{f}(k)e_k\| \leq \|f - \sum_{|k| \leq n} \hat{f}(k)e_k\|_{\infty} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

2) Ist nun  $f \in C_{\text{per}}([- \pi, \pi], \mathbb{C})$  beliebig, so kann man Teil 1) anwenden auf  $f_\delta$ , gegeben durch

$$f_\delta(x) = \frac{1}{\delta} \int_x^{x+\delta} f(t) dt,$$

wobei  $\delta > 0$ . Es gilt

$$\|g\| = \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g(x)|^2 dx \right)^{1/2} \leq \|g\|_\infty \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx \right)^{1/2} = \|g\|_\infty,$$

also  $\|f - f_\delta\| \leq \|f - f_\delta\|_\infty$ . Außerdem gilt  $\|f - f_\delta\|_\infty \rightarrow 0$  für  $\delta \rightarrow 0+$ : Zu  $\varepsilon > 0$  findet man wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von  $f$  auf  $[-2\pi, 2\pi]$  ein  $\delta_0 \in (0, 1)$  mit  $|f(x) - f(t)| \leq \varepsilon$  für alle  $x, t \in [-2\pi, 2\pi]$  mit  $|x - t| \leq \delta_0$ . Für  $\delta \in (0, \delta_0)$  ist dann

$$\begin{aligned} \|f - f_\delta\|_\infty &= \sup_{x \in [-\pi, \pi]} |f(x) - f_\delta(x)| = \sup_{x \in [-\pi, \pi]} \left| \frac{1}{\delta} \int_x^{x+\delta} (f(x) - f(t)) dt \right| \\ &\leq \sup_{x \in [-\pi, \pi]} \sup_{|x-t| \leq \delta} |f(x) - f(t)| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Wir zeigen nun die Konvergenzaussage aus dem Satz für  $f$ . Dazu sei  $\varepsilon > 0$  gegeben. Wir wählen  $\delta > 0$  mit  $\|f - f_\delta\| < \varepsilon/3$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \left\| f - \sum_{|k| \leq n} \hat{f}(k) e_k \right\| &\leq \|f - f_\delta\| + \|f_\delta - \sum_{|k| \leq n} \hat{f}_\delta(k) e_k\| + \left\| \sum_{|k| \leq n} (\widehat{f - f_\delta})(k) e_k \right\| \\ &\leq 2\|f - f_\delta\| + \|f_\delta - \sum_{|k| \leq n} \hat{f}_\delta(k) e_k\| \leq 2\varepsilon/3 + \|f_\delta - \sum_{|k| \leq n} \hat{f}_\delta(k) e_k\| \leq \varepsilon \end{aligned}$$

für  $n \geq n_0$  und geeignetes  $n_0$ . Damit ist der Satz gezeigt.  $\square$

**23.8. Hilberträume:** Ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $V$  mit Skalarprodukt heißt *Hilbertraum*, falls er bezüglich der zum Skalarprodukt gehörigen Norm  $\|\cdot\|$  *vollständig* ist, dh also wenn jede Cauchyfolge  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $V$  einen Grenzwert hat.

Dabei heißt eine Folge  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  *Cauchyfolge*, falls es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  gibt mit  $\|v_n - v_m\| \leq \varepsilon$  für alle  $n, m \geq n_0$  (vgl. HM I).

**Beispiele:** 1) Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  ist  $\mathbb{K}^n$  ein Hilbertraum.

2)  $l_{\mathbb{K}}^2$  ist ein Hilbertraum. Sei  $(x^{(n)})$  eine Cauchyfolge in  $l_{\mathbb{K}}^2$ , wobei  $x^{(n)} = (x_k^{(n)})_{k \in \mathbb{N}}$ . Wegen

$$|x_k^{(n)} - x_k^{(m)}| \leq \|x^{(n)} - x^{(m)}\|$$

ist  $(x_k^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  für jedes  $k$  eine Cauchyfolge in  $\mathbb{K}$ , die gegen ein  $x_k^{(0)} \in \mathbb{K}$  konvergiert.



Sei nun  $\varepsilon > 0$  und  $n_0$  gewählt mit  $\|x^{(n)} - x^{(m)}\| \leq \varepsilon$  für alle  $n, m \geq n_0$ . Sei  $n \geq n_0$ . Dann gilt für jedes  $N \in \mathbb{N}$ :

$$\sum_{k=1}^N |x_k^{(n)} - x_k^{(0)}|^2 = \lim_{m \rightarrow \infty} \underbrace{\sum_{k=1}^N |x_k^{(n)} - x_k^{(m)}|^2}_{\leq \|x^{(n)} - x^{(m)}\|^2} \leq \varepsilon^2,$$

für  $N \rightarrow \infty$  also  $\|x^{(n)} - x^{(0)}\| \leq \varepsilon$ . Daraus folgt  $x^{(0)} \in l_{\mathbb{K}}^2$  und  $\|x^{(n)} - x^{(0)}\| \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ .

**23.9. Abschlußbemerkung:** Setzt man  $l_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{Z}) := \{(c_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} : \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 < \infty\}$ , so erhält die lineare Abbildung

$$C_{\text{per}}([-\pi, \pi], \mathbb{C}) \rightarrow l_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{Z}), \quad f \mapsto (\hat{f}(k))_{k \in \mathbb{Z}},$$

Norm und Skalarprodukt, ist also insbesondere injektiv. Sie ist aber nicht surjektiv! Betrachtet man den größeren Raum  $L^2(-\pi, \pi; \mathbb{C})$  ( $\rightarrow$  Lebesgue-Integral), so wird diese Abbildung surjektiv.  $L^2(-\pi, \pi; \mathbb{C})$  ist ein Hilbertraum, nicht aber  $C_{\text{per}}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ .

Ende M  
17.07.17

## 24 Fouriertransformation

**24.1. Motivation:** In vorigen Kapitel haben wir  $2\pi$ -periodische Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , die etwa stetig differenzierbar sind, in Fourierreihen  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ik(\cdot)}$  entwickelt. Dabei kann man für  $k \in \mathbb{Z}$  den Koeffizienten

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{-ikx} dx$$

als Anteil der Frequenz  $k$  (Oberton der Grundfrequenz 1) im Gesamtsignal verstehen. Für  $2T$ -periodische Funktionen lassen sich die Ergebnisse aus Kapitel 16 umrechnen.

Sei nun  $a > 0$  und sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  stetig differenzierbar mit  $f(x) = 0$  für  $x \notin [-a, a]$  (Impulssignal ohne jegliche Periodizität). Was kann man für eine solche Funktion machen?

Für  $T > a$  definieren wir die  $2T$ -periodische Funktion  $f_T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  durch  $f_T := f$  auf  $(-T, T]$  und wollen  $T \rightarrow \infty$  betrachten. Die durch  $g(x) := f_T(\frac{T}{\pi}x)$  definierte Funktion  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  ist  $2\pi$ -periodisch. Wir entwickeln  $g$  in eine Fourierreihe mittels der Koeffizienten

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} g(x) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} f_T\left(\frac{T}{\pi}x\right) dx \\ &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^{-i\frac{k\pi}{T}y} f(y) dy, \quad k \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

wobei wir  $x = \frac{\pi}{T}y$  substituiert haben. Das letzte Integral erstreckt sich nach Voraussetzung nur über  $[-a, a]$ . Wir verzichten auf den Normierungsfaktor  $\frac{1}{2T}$  und definieren

$$\hat{f}(\xi) := \int_{-a}^a e^{-i\xi x} f(x) dx, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Es ist dann

$$c_k = \hat{f}\left(\frac{k\pi}{T}\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Die Fouriersumme  $\sum_{|k| \leq n} c_k e^{ikx}$  mit Limes  $g(x) = f_T(\frac{T}{\pi}x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , erhält somit (wieder über  $x = \frac{\pi}{T}y$  die Form

$$\sum_{|k| \leq n} \hat{f}\left(\frac{k\pi}{T}\right) e^{i\frac{k\pi}{T}y} \frac{1}{2T} = \frac{1}{2\pi} \sum_{|k| \leq n} \hat{f}\left(\frac{k\pi}{T}\right) e^{i\frac{k\pi}{T}y} \frac{\pi}{T}$$

mit Grenzwert  $f(y)$  (für  $n \rightarrow \infty$ ), wobei  $|y| \leq T$ . Die Summe ist dabei eine Riemannsumme für das Integral

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-n\pi/T}^{n\pi/T} e^{i\xi y} \hat{f}(y) dy.$$

Man wird also hoffen, dass

$$f(y) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi y} f(y) dy, \quad y \in \mathbb{R}.$$

**24.2. Absolut integrierbare Funktionen:** Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  eine Funktion, die für jedes  $R > 0$  über  $[-R, R]$  integrierbar ist. Wir nennen die Funktion  $f$  *absolut integrierbar* (aib), falls

$$\|f\|_1 := \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = \sup_{R>0} \int_{-R}^R |f(x)| dx < \infty.$$

**Bemerkung:** Ist  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  absolut integrierbar, so existiert

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx := \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx,$$

und es gilt:

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f(x) dx \right| \leq \|f\|_1.$$

Die Menge der absolut integrierbaren Funktionen ist ein komplexer Vektorraum, und für  $\alpha \in \mathbb{C}$  und absolut integrierbare Funktionen  $f, g$  gilt

$$\|\alpha f\|_1 = |\alpha| \|f\|_1, \quad \|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1.$$

**Beispiele:** (1) Ist  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  stetig und  $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}$  beschränkt, so ist  $f$  absolut integrierbar.

(2) Die durch  $f(x) := (1 + |x|)^{-\alpha}$  definierte Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  ist genau dann absolut integrierbar, wenn  $\alpha > 1$  gilt.

(3) Die durch  $g(x) := e^{-\alpha|x|}$  definierte Funktion  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  ist für jedes  $\alpha \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re} \alpha > 0$  absolut integrierbar.

(4) Eine absolut integrierbare Funktion muss nicht beschränkt sein. Die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , die gegeben ist durch  $f(x) := \sqrt{n}$  für  $x \in [n, n + 1/n^2]$  und  $n \in \mathbb{N}$  und  $f(x) := 0$  sonst, ist absolut integrierbar.

**24.3. Eigenschaften:** Seien  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  für jedes  $R > 0$  über  $[-R, R]$  integrierbar.

- (a) Gilt  $|f| \leq |g|$  auf  $\mathbb{R}$  und ist  $g$  absolut integrierbar, so ist auch  $f$  absolut integrierbar.
- (b) Ist  $f$  absolut integrierbar und  $g$  beschränkt, so ist  $fg$  absolut integrierbar und

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_{\infty}.$$

**24.4. Fouriertransformation:** Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  absolut integrierbar. Die *Fouriertransformierte von  $f$*  definiert man für  $\xi \in \mathbb{R}$  durch

$$\mathcal{F}f(\xi) := \hat{f}(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x) dx.$$

Das Integral konvergiert dabei für jedes  $\xi \in \mathbb{R}$  absolut, da  $|e^{-i\xi x} f(x)| = |f(x)|$  für jedes  $x$  gilt und  $f$  absolut integrierbar ist (vgl. 24.3). Wir erhalten

$$|\mathcal{F}f(\xi)| \leq \|f\|_1, \quad \xi \in \mathbb{R},$$

so dass  $\mathcal{F}f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  beschränkt ist mit  $\|\mathcal{F}f\|_{\infty} \leq \|f\|_1$ .

**Beispiele:** (1)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(x) = e^{-a|x|}$ , ist für  $a > 0$  absolut integrierbar. Es gilt

$$\mathcal{F}f(\xi) = \frac{2a}{a^2 + \xi^2}, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Die Funktion  $\mathcal{F}f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  ist absolut integrierbar.

(2) Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  definiert durch  $f(x) = 1$  für  $x \in [-1, 1]$  und  $f(x) = 0$  sonst. Dann ist  $f$  absolut integrierbar und

$$\mathcal{F}f(\xi) = 2 \frac{\sin \xi}{\xi}, \quad \xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad \mathcal{F}f(0) = 2.$$

Die Funktion  $\mathcal{F}f$  ist nicht absolut integrierbar.

**24.5. Holomorphe Fortsetzung:** Sei  $a > 0$  und sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  für jedes  $R > 0$  über  $[-R, R]$  integrierbar. Außerdem sei  $x \mapsto e^{a|x|} f(x)$  absolut integrierbar. Für  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|\operatorname{Im} z| < a$  gilt

$$|e^{-izx}| = \exp(-\operatorname{Re}(iz)x) = \exp((\operatorname{Im} z)x) \leq e^{a|x|}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Also konvergiert das Integral

$$F(z) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-izx} f(x) dx$$

absolut für  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|\operatorname{Im} z| < a$ . Die Funktion

$$F : \underbrace{\{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < a\}}_{=: H_a} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto F(z),$$

ist eine holomorphe Fortsetzung von  $\hat{f}$  mit

$$F'(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-izx} (-ix) f(x) dx, \quad z \in H_a.$$

Beachte, dass auch diese Integrale absolut konvergieren.

*Beweis.* (Nicht in der Vorlesung gebracht!) Sei  $z \in H_a$ . Wir bezeichnen das letzte Integral mit  $G(z)$ . Sei  $h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  mit  $|h| < (a - |\operatorname{Im} z|)/2 := \eta$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - G(z) \right| &= \left| \int \left( \frac{e^{-i(z+h)x} - e^{-izx}}{h} + ix e^{-izx} \right) f(x) dx \right| \\ &= \left| \int \left( \frac{e^{-ihx} - 1}{ihx} + 1 \right) + ix e^{-izx} f(x) dx \right|. \end{aligned}$$

Der Term in der Klammer ist betragsmäßig  $\leq |hx|e^{|hx|}$ , so dass der Betrag des Integranden sich abschätzen lässt durch

$$|h|x^2|f(x)| \exp((|\operatorname{Im} z| + |h|)|x|) \leq |h| \underbrace{x^2 e^{(a-\eta)|x|}|f(x)|}_{=:g(x)}.$$

Dabei ist  $g$  absolut integrierbar und also

$$\left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - G(z) \right| \leq |h| \|g\|_1 \rightarrow 0 \quad (|h| \rightarrow 0).$$

□  
Ende Di  
18.07.17

**24.6. Satz:** Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  absolut integrierbar. Dann ist die Funktion  $\mathcal{F}f$  gleichmäßig stetig. Außerdem gilt  $\mathcal{F}f(\xi) \rightarrow 0$ ,  $|\xi| \rightarrow \infty$  (Riemann-Lebesgue-Lemma).

*Beweis.* Sei  $\varepsilon > 0$ . Wir finden  $\delta > 0$  mit  $|e^{-ix} - 1| \leq \varepsilon$  für  $|x| \leq \delta$ . Für alle  $\xi \in \mathbb{R}$  und  $h \neq 0$  gilt dann

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}f(\xi+h) - \mathcal{F}f(\xi)| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |(e^{-i(\xi+h)t} - e^{-i\xi t})f(t)| dt = \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-iht} - 1| |f(t)| dt \\ &\leq \underbrace{\varepsilon \int_{|t| \leq \delta/|h|} |f(t)| dt}_{\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt} + 2 \underbrace{\int_{|t| > \delta/|h|} |f(t)| dt}_{\rightarrow 0, h \rightarrow 0}. \end{aligned}$$

Also ist  $\mathcal{F}f$  gleichmäßig stetig.

Ist  $f$  gegeben durch  $f(t) = 1$ ,  $t \in [a, b]$ , und  $f(t) = 0$  sonst, so gilt für  $\xi \neq 0$ :

$$\mathcal{F}f(\xi) = \int_a^b e^{-i\xi t} dt = \frac{e^{-i\xi b} - e^{-i\xi a}}{-i\xi}$$

und somit  $\mathcal{F}f(\xi) \rightarrow 0$  für  $|\xi| \rightarrow \infty$ . Dies gilt dann auch für alle Linearkombinationen solcher Funktionen. Den allgemeinen Fall erhält man durch ein Approximationsargument. □

**24.7. Rechenregeln:** Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  absolut integrierbar.

(a) Ist  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , so gilt  $\mathcal{F}\{f(a(\cdot))\}(\xi) = \frac{1}{|a|}\mathcal{F}f\left(\frac{\xi}{a}\right)$ ,  $\xi \in \mathbb{R}$ .

(b) Ist  $b \in \mathbb{R}$ , so gilt  $\mathcal{F}\{f(\cdot - b)\}(\xi) = e^{-i\xi b}\mathcal{F}f(\xi)$ ,  $\xi \in \mathbb{R}$ .

(c) Ist  $b \in \mathbb{R}$ , so gilt  $\mathcal{F}\{e^{ib(\cdot)}f\}(\xi) = \mathcal{F}f(\xi - b)$ ,  $\xi \in \mathbb{R}$ .

(d) Ist  $x \mapsto xf(x)$  absolut integrierbar, so ist  $\mathcal{F}f$  differenzierbar und es gilt

$$(\mathcal{F}f)'(\xi) = \mathcal{F}\{x \mapsto (-ix)f(x)\}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

(e) Ist  $f$  stetig und stückweise stetig differenzierbar derart, dass  $f'$  wieder absolut integrierbar ist, so gilt

$$\mathcal{F}\{f'\}(\xi) = i\xi\mathcal{F}f(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Dabei nennen wir  $f$  stückweise stetig differenzierbar, falls eine streng monoton wachsende Folge  $(x_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  existiert mit  $x_j \rightarrow \pm\infty$  für  $j \rightarrow \pm\infty$  so, dass  $f$  auf jedem Intervall  $(x_j, x_{j+1})$  stetig differenzierbar ist und die einseitigen Grenzwerte  $f(x_j \pm)$ ,  $f'(x_j \pm)$  existieren.

*Beweis.* Man erhält (a), (b) und (c) durch naheliegende Substitutionen.

Bei (d) findet man zu  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  mit  $|\frac{e^{iy}-1}{y} - 1| < \varepsilon$  für  $|y| < \delta$ . Außerdem ist  $\sup_y |\frac{e^{iy}-1}{y} - 1| =: M < \infty$ . Für  $h \neq 0$  ist dann

$$\begin{aligned} \left| \frac{\hat{f}(\xi+h) - \hat{f}(\xi)}{h} + \int ix f(x) e^{-ix\xi} dx \right| &= \left| \int \left( \frac{e^{-ihx} - 1}{ihx} + 1 \right) ix f(x) e^{-ix\xi} dx \right| \\ &\leq \varepsilon \int_{|x| \leq \delta/|h|} |xf(x)| dx + M \int_{|x| \geq \delta/|h|} |xf(x)| dx, \end{aligned}$$

wobei das letzte Integral nach Voraussetzung wieder für  $h \rightarrow 0$  gegen Null geht.

Bei (e) beachte man, dass absolute Integrierbarkeit von  $f'$  Existenz der Grenzwerte  $f(\pm\infty)$  impliziert, da etwa

$$f(b) - f(0) = \int_0^b f'(x) dx$$

für  $b \rightarrow \infty$  konvergiert. Da  $f$  außerdem absolut integrierbar ist, muss  $f(\pm\infty) = 0$  gelten. Für  $a, b > 0$  ist dann mittels partieller Integration

$$\int_{-a}^b e^{-i\xi x} f'(x) dt = e^{-i\xi x} f(x) \Big|_{-a}^b + i\xi \int_{-a}^b e^{-i\xi x} f(x) dt,$$

und (e) folgt für  $a, b \rightarrow \infty$ . □

**24.8. Beispiel:**  $\phi(x) = e^{-x^2/2}$ : Für jedes  $x \in \mathbb{R}$  gilt  $\phi'(x) = -x\phi(x)$ . Wir wenden die Fouriertransformation auf diese Gleichung an und erhalten:

$$i\xi \mathcal{F}\phi(\xi) = \mathcal{F}\{\phi'\}(\xi) = \mathcal{F}\{x \mapsto -x\phi(x)\}(\xi) = -i(\mathcal{F}\phi)'(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R},$$

also  $(\mathcal{F}\phi)'(\xi) = -\xi(\mathcal{F}\phi)(\xi)$ . Somit löst  $\mathcal{F}\phi$  dieselbe Differentialgleichung wie  $\phi$  und es folgt

$$\mathcal{F}\phi(\xi) = \mathcal{F}\phi(0) \cdot e^{-\xi^2/2} = \sqrt{2\pi}e^{-\xi^2/2}, \quad \xi \in \mathbb{R},$$

da  $\mathcal{F}\phi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}$ .

**24.9. Dancing-Hat-Lemma:** Seien  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  absolut integrierbar. Dann gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{F}f)(\xi)g(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta)(\mathcal{F}g)(\eta) d\eta.$$

Der Name kommt daher, dass man statt  $\mathcal{F}f$  ja auch  $\hat{f}$  (engl: "hat  $f$ ") schreibt.

*Beweis.* Nur für  $f, g$  mit  $f(x) = g(x) = 0$  für  $x \notin [-a, a]$  (allgemeiner Fall durch Approximation). Wir vertauschen die Integrationsreihenfolge

$$\int_{-a}^a \int_{-a}^a e^{-i\xi\eta} f(\eta) d\eta g(\xi) d\xi = \int_{-a}^a \int_{-a}^a e^{-i\xi\eta} g(\xi) d\xi f(\eta) d\eta.$$

□

**24.10. Fourierinversionsformel:** Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  stetig, beschränkt, absolut integrierbar und derart, dass  $\mathcal{F}f$  auch absolut integrierbar ist. Dann gilt für jedes  $x \in \mathbb{R}$ :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} \mathcal{F}f(\xi) d\xi.$$

*Beweis.* Es reicht, die Formel für  $x = 0$  zu zeigen (verwende die Verschiebungsregel 24.7(b)). Wir setzen  $h(x) = e^{-x^2/2}$  und  $g(x) = h(ax)$ , wobei  $a > 0$ . Dann gilt nach 24.9 und 24.7(a):

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{F}f)(\xi)h(a\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(\mathcal{F}g)(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{1}{a}(\mathcal{F}h)(x/a) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(ax)\mathcal{F}h(x) dx.$$

Lässt man hier  $a$  gegen Null gehen, so konvergiert die rechte Seite gegen  $2\pi f(0)$  und die linke Seite konvergiert gegen  $\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}f(\xi) d\xi$ , wovon wir uns jetzt überzeugen.

Linke Seite: Es gilt

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{F}f)(\xi)h(a\xi) d\xi - \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}f(\xi) d\xi \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}f(\xi)| |h(a\xi) - 1| d\xi.$$

Zu gegebenem  $\varepsilon > 0$  finden wir  $\delta > 0$  so, dass  $|h(x) - 1| \leq \varepsilon$  für  $|x| \leq \delta$ . Für alle (anderen)  $x \in \mathbb{R}$  hingegen gilt  $|h(x) - 1| \leq 2$ . Wir können dann weiter abschätzen

$$= \int_{|\xi| \leq \delta/a} \dots + \int_{|\xi| \geq \delta/a} \dots \leq \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} |(\mathcal{F}f)(\xi)| d\xi + 2 \underbrace{\int_{|\xi| > \delta/a} |(\mathcal{F}f)(\xi)| d\xi}_{\rightarrow 0, (h \rightarrow 0)}.$$

Rechte Seite: Zunächst gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}h(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{2\pi} e^{-t^2/2} dt = 2\pi.$$

Zu gegebenem  $\varepsilon > 0$  finden wir  $\delta > 0$  mit  $|f(x) - f(0)| \leq \varepsilon$  für  $|x| \leq \delta$ . Da  $f$  beschränkt ist, gibt es andererseits  $M > 0$  mit  $|f(x) - f(0)| \leq M$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Wir schreiben nun

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(at)(\mathcal{F}h)(t) dt - 2\pi f(0) \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(at) - f(0)| |(\mathcal{F}h)(t)| dt = \int_{|t| \leq \delta/a} \dots + \int_{|t| \geq \delta/a} \dots$$

und können wie oben verfahren. □

**Bemerkung:** Man kann zeigen, dass man in 24.8 Stetigkeit und Beschränktheit von  $f$  nicht fordern muss. Diese Eigenschaften erhält man aus der Voraussetzung, dass  $\mathcal{F}f$  absolut integrierbar ist.

**Beispiel:** Es gilt  $\mathcal{F}\{x \mapsto \frac{2}{1+x^2}\}(\xi) = 2\pi e^{-|\xi|}$ ,  $\xi \in \mathbb{R}$ . (Wende 24.10 auf das Beispiel in 24.4(1) mit  $a = 1$  an).

Ende Do  
20.07.17

**24.11. Satz von Plancherel:** Ist  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  absolut integrierbar und gilt  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty$ , so ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}f(\omega)|^2 d\omega.$$

*Beweis.* Ist zusätzlich  $\mathcal{F}f$  absolut integrierbar, so verwende man 24.9 und schreibe

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}f(\omega) \overline{\mathcal{F}f(\omega)} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \mathcal{F}\{\overline{\mathcal{F}f(\omega)}\}(t) dt.$$

Dann beachte man

$$\overline{\mathcal{F}f(\omega)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \overline{f(t)} dt = (\mathcal{F}\overline{f})(-\omega)$$

und (unter Verwendung von 24.10)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\omega} (\mathcal{F}\overline{f})(-\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\omega} (\mathcal{F}\overline{f})(\omega) d\omega = 2\pi \overline{f(t)}.$$

Den allgemeinen Fall erhält man durch ein Approximationsargument. □



**24.12. Quadratintegrierbare Funktionen:** Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  eine Funktion, die für jedes  $R > 0$  über  $[-R, R]$  integrierbar ist. Wir nennen die Funktion  $f$  *quadratintegrierbar* (qib), falls

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \sup_{R>0} \int_{-R}^R |f(x)|^2 dx < \infty.$$

In diesem Fall setzen wir

$$\|f\|_2 := \left( \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

**Beispiele:** (1) Ist  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  stetig und  $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}$  beschränkt, so ist  $f$  quadratintegrierbar.

(2) Die durch  $f(x) := (1 + |x|)^{-\alpha}$  definierte Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  ist genau dann quadratintegrierbar, wenn  $\alpha > 1/2$  gilt. Es gibt also quadratintegrierbare Funktionen, die nicht absolut integrierbar sind.

(3) Die durch  $g(x) := e^{-\alpha|x|}$  definierte Funktion  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  ist für jedes  $\alpha \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re} \alpha > 0$  quadratintegrierbar.

**Bemerkung:** Sind  $f$  und  $g$  quadratintegrierbar, so ist  $fg$  absolut integrierbar und

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_2 \|g\|_2.$$

Die Menge der quadratintegrierbaren Funktionen ist ein komplexer Vektorraum. Die durch

$$(f|g) := \int f(x) \overline{g(x)} dx$$

definierte Abbildung hat die Eigenschaften eines Skalarproduktes (bis auf die Definitheit, die man aber erhalten kann, wenn man Funktionen  $f, g$  mit  $(f - g|f - g) = 0$  identifiziert). Man hat

$$\|\alpha f\|_2 = |\alpha| \|f\|_2, \quad (\alpha \in \mathbb{C}), \quad \|f + g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2.$$

Die Aussage von 24.11 bedeutet also: Ist  $f$  absolut integrierbar und quadratintegrierbar, so ist  $\mathcal{F}f$  quadratintegrierbar und

$$\|\mathcal{F}f\|_2 = \sqrt{2\pi} \|f\|_2,$$

dh die Fouriertransformation ändert die “2-Norm”  $\|\cdot\|_2$  nur um eine Konstante.

Ist  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  beschränkt und absolut integrierbar, so ist  $f$  quadratintegrierbar und

$$\|f\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \leq \|f\|_{\infty} \|f\|_1.$$

**24.13. Heisenbergsche Unschärferelation (1-dim.):** Sei  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  absolut integrierbar, beschränkt und stetig differenzierbar. Außerdem seien  $\psi'$  und  $x \mapsto x\psi(x)$  absolut integrierbar und beschränkt. Dann gilt

$$\|x\psi\|_2 \|\xi\hat{\psi}\|_2 \geq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \|\psi\|_2^2.$$

Beachte dabei, dass  $\xi \mapsto i\xi\hat{\psi}(\xi) = \widehat{\psi}'(\xi)$  quadratintegrierbar ist.

*Beweis.* Es ist

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re}(x\psi|\psi') &= (x\psi|\psi') + (\psi'|x\psi) \\ &= \int_{\mathbb{R}} x\psi(x)\overline{\psi'(x)} + \psi'(x)\overline{x\psi(x)} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} x(\psi(x)\overline{\psi'(x)} + \psi'(x)\overline{\psi(x)}) dx \\ &= x|\psi(x)|^2 \Big|_{x=-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx \\ &= -\|\psi\|_2^2, \end{aligned}$$

also

$$\frac{1}{2} \|\psi\|_2^2 = |\operatorname{Re}(x\psi|\psi')| \leq \|x\psi\|_2 \|\psi'\|_2.$$

Außerdem ist

$$\|\psi'\|_2 = (2\pi)^{-1/2} \|\widehat{\psi}'\|_2 = (2\pi)^{-1/2} \|\xi\hat{\psi}\|_2.$$

□

**Korollar:** Ist  $\psi$  wie oben und sind  $x_0, \xi_0 \in \mathbb{R}$ , so gilt

$$\|(x - x_0)\psi\|_2 \|(\xi - \xi_0)\hat{\psi}\|_2 \geq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \|\psi\|_2^2.$$

*Beweis.* Betrachte  $g(x) := e^{-i\xi_0 x} \psi(x + x_0)$ .

□

**Interpretation:** Ist  $\psi$  wie in 24.13 mit  $\|\psi\|_2 = 1$ , so sind  $x \mapsto |\psi(x)|^2$  und  $\xi \mapsto (2\pi)^{-1} |\hat{\psi}(\xi)|^2$  Wahrscheinlichkeitsdichten auf  $\mathbb{R}$ . Sind  $X, Y$  Zufallsvariablen, die entsprechend verteilt sind und  $x_0 = E(X) = \int x|\psi(x)|^2 dx$ ,  $\xi_0 = E(Y) = \int \xi|\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi$ , so sind  $\|(x - x_0)\psi\|_2 = \sigma_X$  und  $(2\pi)^{-1/2} \|(\xi - \xi_0)\hat{\psi}\|_2 = \sigma_Y$  die Standardabweichungen von  $X$  bzw.  $Y$ , und das Korollar besagt

$$\sigma_X \sigma_Y \geq \frac{1}{2},$$

dh  $X$  und  $Y$  können nicht gleichzeitig beliebig gut um  $x_0$  bzw.  $\xi_0$  lokalisiert sein.

**24.14. Faltung und Fouriertransformation:** Seien  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  absolut integrierbar und  $g$  sei beschränkt. Für jedes  $t \in \mathbb{R}$  ist dann die Funktion  $x \mapsto f(x)g(t-x)$  absolut integrierbar und die Funktion

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad h(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(t-x) dx$$

heißt *Faltung von  $f$  und  $g$* , geschrieben  $h =: f * g$ . Die Funktion  $f * g$  ist stetig, beschränkt und absolut integrierbar und es gilt

$$\mathcal{F}(f * g)(\xi) = \mathcal{F}f(\xi) \cdot \mathcal{F}g(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

**Bemerkung:** Gilt zusätzlich  $f(t) = g(t) = 0$  für  $t < 0$ , so ist  $f * g(t) = 0$  für  $t < 0$  und

$$f * g(t) = \int_0^t f(x)g(t-x) dx, \quad t \geq 0.$$

*Beweis.* Zunächst ist das Integral in der Definition absolut konvergent und eine Substitution gibt

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(t-x) dx.$$

Ist  $t \in \mathbb{R}$ , so gilt

$$|h(t)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)||g(t-x)| dx \leq \|g\|_{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx,$$

und  $h$  ist beschränkt mit  $\|h\|_{\infty} \leq \|g\|_{\infty} \|f\|_1$ . Ist zusätzlich  $\tau \in \mathbb{R}$ , so erhalten wir genauso

$$|h(t+\tau) - h(t)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)||f(t+\tau-x) - f(t-x)| dx \leq \|g\|_{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(\tau+y) - f(y)| dy,$$

wenn wir  $x = t - y$  substituieren. Dabei konvergiert das letzte Integral für  $\tau \rightarrow 0$  gegen Null (hier ohne Beweis). Also ist  $h$  stetig.

Weiter gilt durch Vertauschung der Integrationsreihenfolge (zunächst wieder für  $f, g$  mit  $f(x) = g(x) = 0$  für  $x \notin [-a, a]$ , allgemeine Funktionen muss man geeignet approximieren):

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)||g(t-x)| dx dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \int_{-\infty}^{\infty} |g(t-x)| dt dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| dt < \infty, \end{aligned}$$

und  $h$  ist absolut integrierbar. Der Beweis für die Faltungsregel der Fouriertransformation verwendet ähnliche Argumente:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}h(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi t} h(t) dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x) e^{-i\xi(t-x)} g(t-x) dx dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi(t-x)} g(t-x) dt dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x) dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi t} g(t) dt.
\end{aligned}$$

□

**24.15. Anwendung:** Gegeben sei eine stetige und absolut integrierbare Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  und  $q \in \mathbb{C}$ . Gesucht ist eine  $C^2$ -Funktion  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$-u'' + qu = f, \quad \text{auf } \mathbb{R}.$$

Wenn wir annehmen, dass  $u, u', u''$  absolut integrierbar sind, können wir die Fouriertransformation verwenden und erhalten via 24.7 die Gleichung

$$\xi^2 \hat{u}(\xi) + q \hat{u}(\xi) = \hat{f}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Ist nun  $q \notin (-\infty, 0]$ , so ist  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\xi \mapsto (\xi^2 + q)^{-1}$ , beschränkt, und wir erhalten für die Fouriertransformation der Lösung:

$$\hat{u}(\xi) = (\xi^2 + q)^{-1} \hat{f}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Nun müssen wir zurücktransformieren. Finden wir eine absolut integrierbare und beschränkte Funktion  $k_q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\hat{k}_q(\xi) = (\xi^2 + q)^{-1}$ , so ist  $u = k_q * f$  nach 24.14 ein Kandidat. Da  $\xi \mapsto (\xi^2 + q)^{-1}$  absolut integrierbar ist, kann man nach 24.10 ansetzen

$$k_q(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix\xi}}{\xi^2 + q} d\xi.$$

Wir berechnen  $k_q$  für  $q > 0$ :

$$k_q(x) = \frac{1}{2\sqrt{q}} e^{-\sqrt{q}|x|}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Diese Funktion ist beschränkt und absolut integrierbar. Eine Lösung der ursprünglichen Gleichung sollte also durch

$$u(x) := k_q * f(x) = \frac{1}{2\sqrt{q}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sqrt{q}|x-y|} f(y) dy, \quad x \in \mathbb{R},$$

gegeben sein. Das ist noch zu überprüfen.

**24.16. Wärmeleitungsgleichung:** Gesucht ist  $u : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\begin{cases} \partial_t u = \partial_x^2 u, & t > 0, x \in \mathbb{R} \\ u(0, x) = f(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (1)$$

wobei  $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$  und  $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$ . Hierbei ist  $t$  die Zeitvariable und  $x$  die Ortsvariable.

**Voraussetzung:**  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sei absolut integrierbar. Außerdem sei  $u(t, \cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  für jedes  $t > 0$  absolut integrierbar.

**Bemerkung:** Diese Annahme für  $u$  ist physikalisch sinnvoll. Ist z.B.  $f(x) \geq 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ , so ist  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$  proportional zur Gesamtenergie. Wir erwarten  $u(t, x) \geq 0$  und wegen Energieerhaltung

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t, x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \quad \text{für jedes } t > 0.$$

Wir verwenden Fouriertransformation in  $x$  und setzen

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x) dx, & \xi \in \mathbb{R}, \\ \hat{u}(t, \xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} u(t, x) dx, & t > 0, \xi \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Dann wird (1) zu

$$\begin{cases} \partial_t \hat{u}(t, \xi) = -\xi^2 \hat{u}(t, \xi), & t > 0, \xi \in \mathbb{R}, \\ \hat{u}(0, \xi) = \hat{f}(\xi), & \xi \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2)$$

Für festes  $\xi \in \mathbb{R}$  ist die eindeutige Lösung von (2) gegeben durch

$$\hat{u}(t, \xi) = e^{-t\xi^2} \hat{f}(\xi), \quad t > 0, \xi \in \mathbb{R}.$$

Wir hoffen also, dass wir durch Fourierinversion eine Lösung von (1) erhalten. Nach der Faltungsregel ist für  $g_t(x) := \mathcal{F}^{-1}(e^{-t\xi^2})(x)$ :

$$\mathcal{F}(g_t * f)(\xi) = e^{-t\xi^2} \hat{f}(\xi),$$

also setzen wir

$$u(t, x) := g_t * f(x), \quad t > 0, x \in \mathbb{R}.$$

Wir berechnen die Funktion  $g_t$ . Es ist  $e^{-t\xi^2} = e^{-(\sqrt{2t}\xi)^2/2}$ , also

$$\begin{aligned} g_t(x) = \mathcal{F}^{-1}(e^{-t\xi^2})(x) &= \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(e^{-t\xi^2})(-x) \\ &= \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(\xi \mapsto e^{-(\sqrt{2t}\xi)^2/2})(-x) \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2t}} \sqrt{2\pi} e^{-(x/\sqrt{2t})^2/2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/(4t)}. \end{aligned}$$

Somit ist

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2/(4t)} f(y) dy, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ob bzw. in welchem Sinn dies nun eine Lösung von (1) ist, muss man noch überprüfen.

**Bemerkung:** Setzt man  $h(t, x) := g_t(x)$ , so löst  $h$  die Wärmeleitungsgleichung. Es gilt

$$\partial_t h(t, x) = -\frac{1}{2}(4\pi t)^{-3/2} \cdot 4\pi e^{-x^2/(4t)} + (4\pi t)^{-1/2} e^{-x^2/(4t)} \cdot \frac{x^2}{4t^2}$$

und

$$\partial_x h(t, x) = (4\pi t)^{-1/2} e^{-x^2/(4t)} \cdot \frac{-2x}{4t},$$

also

$$\partial_x^2 h(t, x) = (4\pi t)^{-1/2} e^{-x^2/(4t)} \cdot \frac{x^2}{4t^2} + (4\pi t)^{-1/2} e^{-x^2/(4t)} \cdot \frac{-1}{2t} = \partial_t h(t, x).$$

**Bemerkung:** Der zu dieser Lösung gehörige ‘‘Anfangswert’’ wäre  $\delta_0$ .

**24.17. Ein Randwertproblem:** Ist  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ , so heißt eine Funktion  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  *harmonisch*, falls  $u$  zweimal differenzierbar ist und  $\Delta u = 0$  in  $\Omega$  gilt. Hierbei ist  $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$  der Laplace-Operator.

Wir setzen  $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$  (obere Halbebene) und suchen eine Funktion  $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & x \in \mathbb{R}, y > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (1)$$

**Voraussetzungen:**  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sei absolut integrierbar. Weiter sei  $u(\cdot, y) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto u(x, y)$  für jedes  $y > 0$  absolut integrierbar und es gebe  $M > 0$  mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x, y)| dx \leq M \quad \text{für alle } y > 0.$$

Wir verwenden wieder Fouriertransformation in  $x$  und setzen

$$\hat{u}(\xi, y) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} u(x, y) dx.$$

Wir erhalten dann

$$\begin{cases} -\xi^2 \hat{u}(\xi, y) + \partial_y^2 \hat{u}(\xi, y) = 0, & \xi \in \mathbb{R}, y > 0, \\ \hat{u}(\xi, 0) = \hat{f}(\xi), & \xi \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2)$$

Für festes  $\xi \in \mathbb{R}$  hat jede Lösung  $v(y)$  der ersten Zeile von (2) die Form

$$v(y) = \alpha e^{-y|\xi|} + \beta e^{y|\xi|}, \quad y \geq 0,$$

wobei  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  (vgl. 12.5 in HMI). Wir beachten nun, dass die Voraussetzung impliziert:

$$|\hat{u}(\xi, y)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{|e^{-i\xi x}|}_{=1} |u(x, y)| dx \leq M, \quad \xi \in \mathbb{R}, y > 0.$$

Also ist  $y \mapsto \hat{u}(\xi, y)$  für festes  $\xi \in \mathbb{R}$  beschränkt. Folglich ist oben  $\beta = 0$  und  $\alpha = \hat{f}(\xi)$ , und wir erhalten

$$\hat{u}(\xi, y) = e^{-y|\xi|} \hat{f}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}, y > 0.$$

Somit ist  $u(x, y)$  gegeben als Faltung von  $f$  mit der Funktion  $p_y := \mathcal{F}^{-1}(\xi \mapsto e^{-y|\xi|})$ , ausgewertet an der Stelle  $x$ . Wir rechnen

$$\begin{aligned} p_y(x) &= \mathcal{F}^{-1}(\xi \mapsto e^{-y|\xi|})(x) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(\xi \mapsto e^{-y|\xi|})(-x) \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{y} \mathcal{F}(\xi \mapsto e^{-|\xi|})(-x/y) \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{y} \frac{2}{1 + (-x/y)^2} = \frac{1}{\pi} \frac{y}{y^2 + x^2}. \end{aligned}$$

Also ist  $u$  gegeben durch

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{y^2 + (x - \tilde{x})^2} f(\tilde{x}) d\tilde{x}, \quad x \in \mathbb{R}, y > 0.$$

Dieses  $u$  heißt *Poisson-Erweiterung von  $f$*  zu einer in der oberen Halbebene harmonischen Funktion. Dass hierdurch tatsächlich eine Lösung von (1) gegeben ist, muss noch überprüft werden.

**24.18. Differenzierbarkeit der Lösungen:** (a) Die Funktion  $u$  aus 24.15 kann man direkt differenzieren:

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{2\sqrt{q}} \int_{-\infty}^x e^{-\sqrt{q}(x-y)} f(y) dy + \frac{1}{2\sqrt{q}} \int_x^{\infty} e^{-\sqrt{q}(y-x)} f(y) dy \\ u'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{q}} f(x) - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^x e^{-\sqrt{q}(x-y)} f(y) dy - \frac{1}{2\sqrt{q}} f(x) + \frac{1}{2} \int_x^{\infty} e^{-\sqrt{q}(y-x)} f(y) dy \\ u''(x) &= -\frac{1}{2} f(x) + \frac{\sqrt{q}}{2} \int_{-\infty}^x e^{-\sqrt{q}(x-y)} f(y) dy - \frac{1}{2} f(x) + \frac{\sqrt{q}}{2} \int_x^{\infty} e^{-\sqrt{q}(y-x)} f(y) dy \\ &= -f(x) + qu(x). \end{aligned}$$

(b) Die in 24.16 und 24.17 angegebenen Funktionen  $u$  sind für  $t > 0$  bzw.  $y > 0$  beliebig oft partiell nach  $x$  differenzierbar: Wir verwenden dazu 24.7. Für jedes  $k \in \mathbb{N}$  und jedes feste  $t > 0$  (bzw.  $y > 0$ ) ist  $\xi \mapsto \xi^k e^{-t\xi^2}$  (bzw.  $\xi \mapsto \xi^k e^{-y|\xi|}$ ) wieder absolut integrierbar, also ist

nach 24.10 und 24.7 die Funktion  $x \mapsto \mathcal{F}^{-1}(e^{-t\xi^2})(x)$  (bzw.  $x \mapsto \mathcal{F}^{-1}(e^{-y|\xi|})(x)$ ) beliebig oft nach  $x$  differenzierbar. Da  $\xi \mapsto \hat{f}(\xi)$  beschränkt ist, geben dieselben Argumente, dass

$$x \mapsto u(t, x) = \mathcal{F}^{-1}(e^{-t\xi^2} \hat{f}(\xi))(x) \quad (\text{bzw. } x \mapsto u(x, y) = \mathcal{F}^{-1}(e^{-y|\xi|} \hat{f}(\xi))(x))$$

beliebig oft nach  $x$  differenzierbar ist mit beschränkten Ableitungen. Wir erhalten sogar  $\partial_x^k u(t, x) = (\partial_x^k g_t) * f$  (bzw.  $\partial_x^k u(x, y) = (\partial_x^k p_y) * f$ ) für jedes  $k \in \mathbb{N}$ , wie man über die Faltungsregel und 24.7 einsieht.

(c) Die in 24.16) bzw. 24.17 angegebenen Lösungen sind beliebig oft nach  $t$  bzw. nach  $y$  differenzierbar. Wir diskutieren dies am Beispiel  $u(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} g_t(x-y)f(y) dy$ . Wir wollen zeigen, dass gilt

$$\partial_t^k u(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} (\partial_t^k g_t)(x-y)f(y) dy.$$

für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Wir beschränken uns auf den Fall  $k = 1$  und fixieren  $t$  und  $x$ . Dann rechnen wir

$$\left| \frac{u(t+h, x) - u(t, x)}{h} - \int_{-\infty}^{\infty} (\partial_t g_t)(y)f(x-y) dy \right| \quad (1)$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left| \frac{g_{t+h}(y) - g_t(y)}{h} - (\partial_t g_t)(y) \right|}_{=:\Delta_{t,h}(y)} |f(x-y)| dy. \quad (2)$$

Schreiben wir  $\phi(t, y) := \partial_t g_t(y)$ , so haben wir

$$\Delta_{t,h}(y) = \left| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} (\phi(\tau, y) - \phi(t, y)) d\tau \right| \leq \sup_{|\tau-t| \leq |h|} |\phi(\tau, y) - \phi(t, y)| \leq |h| \sup_{|\tau-t| \leq |h|} |\partial_t \phi(\tau, y)|.$$

Nun stellen wir fest, dass das letzte sup beschränkt ist. Wir erhalten

$$\partial_t u(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} (\partial_t g_t)(x-y)f(y) dy.$$

In 24.17 kann man analog argumentieren.

**Bemerkung:** In 24.16 erhalten wir, dass  $u$  in  $(0, \infty) \times \mathbb{R}$  eine Lösung von  $\partial_t u = \partial_x^2 u$  ist. In 24.17 gilt  $\Delta u = 0$  in  $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ .

**24.19. Anfangs- bzw. Randwerte:** Was passiert in 24.16 mit  $u(t, x)$  für  $t \rightarrow 0+$  (bzw. in 24.17 mit  $u(x, y)$  für  $y \rightarrow 0+$ )?

In 24.16 wird  $f$  gefaltet mit

$$g_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/(4t)} = \frac{1}{\sqrt{t}} g_1\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right),$$



und in 24.17 wird  $f$  gefaltet mit

$$p_y(x) = \frac{1}{\pi} \frac{y}{y^2 + x^2} = \frac{1}{y} p_1\left(\frac{x}{y}\right).$$

**Satz:** Ist  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt und für jedes  $R > 0$  über  $[-R, R]$  integrierbar und ist  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  absolut integrierbar mit  $\int_{-\infty}^{\infty} h(y) dy = 1$ , sowie

$$u(t, x) := \frac{1}{t} \int_{-\infty}^{\infty} h\left(\frac{x-y}{t}\right) f(y) dy, \quad t > 0, x \in \mathbb{R},$$

so gilt

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} u(t, x) = f(x), \quad \text{wenn } f \text{ in } x \text{ stetig ist.}$$

*Beweis.* Sei  $\varepsilon > 0$ . Wir finden  $M, \delta > 0$  mit  $|f(y) - f(x)| \leq M$  für alle  $y \in \mathbb{R}$  und  $|f(y) - f(x)| \leq \varepsilon$  für alle  $|y - x| \leq \delta$ . Wegen  $\int_{-\infty}^{\infty} h((x-y)/t) dy = t$  gilt dann:

$$\begin{aligned} |u(t, x) - f(x)| &\leq t^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} |h((x-y)/t)| |f(y) - f(x)| dy \\ &\leq \varepsilon t^{-1} \int_{|y-x| \leq \delta} |h((x-y)/t)| dy + M t^{-1} \int_{|y-x| \geq \delta} |h((x-y)/t)| dy \\ &\leq \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} |h(y)| dy + \underbrace{\int_{|y| \geq \delta/t} |h(y)| dy}_{\rightarrow 0 \text{ (} t \rightarrow 0^+ \text{)}}. \end{aligned}$$

□

**Folgerung:** In 24.16 gilt  $u(t, x) \rightarrow f(x)$  ( $t \rightarrow 0^+$ ) für jedes  $x \in \mathbb{R}$ , wenn  $f$  zusätzlich als stetig und beschränkt vorausgesetzt wird.

Nehmen wir in 24.17 an, dass  $f$  zusätzlich stetig und beschränkt ist, so haben wir auch hier  $u(x, y) \rightarrow f(x)$  ( $y \rightarrow 0^+$ ) für jedes  $x \in \mathbb{R}$ .

**Bemerkung:** Setzt man im obigen Satz nur voraus, dass  $f$  absolut integrierbar ist, so erhält man

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|u(t, \cdot) - f\|_1 = 0.$$

Zum Beweis vertausche man die Integrationsreihenfolge

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |u(t, x) - f(x)| dx &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t} |h(y/t)| |f(x-y) - f(x)| dy dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t} |h(y/t)| \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y) - f(x)| dx}_{=\|f(\cdot - y) - f\|_1} dy \end{aligned}$$

und beachte  $\|f(\cdot - y) - f\|_1 \leq 2\|f\|_1$  für jedes  $y \in \mathbb{R}$  sowie  $\lim_{y \rightarrow 0} \|f(\cdot - y) - f\|_1 = 0$ .

**24.20. Fouriertransformation in  $L^2$ :** Wir erinnern an 24.11 und 24.12: Ist  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  absolut integrierbar und quadratintegrierbar, so gilt

$$\|\mathcal{F}f\|_2 = \sqrt{2\pi}\|f\|_2.$$

Ist nun  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  nur quadratintegrierbar, so findet man eine Folge  $(f_n)$  von Funktionen, die absolut integrierbar und quadratintegrierbar sind, mit  $\|g - f_n\|_2 \rightarrow 0$ . Dann ist  $(f_n)$  eine  $\|\cdot\|_2$ -Cauchyfolge, und somit ist auch  $(\mathcal{F}f_n)$  eine  $\|\cdot\|_2$ -Cauchyfolge. Findet man nun eine quadratintegrierbare Funktion  $h$  mit  $\|h - \mathcal{F}f_n\|_2 \rightarrow 0$ , so könnte man  $\mathcal{F}g := h$  setzen.

Leider geht dies im allgemeinen nicht. Verwendet man jedoch den Lebesgueschen Integralbegriff, so ist der Raum  $L^2(\mathbb{R})$  etwas größer als der Raum der quadratintegrierbaren Funktionen und *vollständig*, dh jede  $\|\cdot\|_2$ -Cauchyfolge besitzt einen Grenzwert. Auf die beschriebene Art und Weise kann man dann  $\mathcal{F}g \in L^2(\mathbb{R})$  für jedes  $g \in L^2(\mathbb{R})$  erklären, so dass  $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  bijektiv ist und  $\|\mathcal{F}g\|_2 = \sqrt{2\pi}\|g\|_2$  gilt.

Dadurch wird vieles vereinfacht: Ist z.B.  $m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  stetig und beschränkt, so definiert  $g \mapsto \mathcal{F}^{-1}\{\xi \mapsto m(\xi)\hat{g}(\xi)\}$  eine lineare Abbildung  $T : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  mit

$$\|Tg\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|\xi \mapsto m(\xi)\hat{g}(\xi)\|_2 \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|m\|_\infty\|\mathcal{F}g\|_2 = \|m\|_\infty\|g\|_2.$$

Hingegen ist etwa für absolut integrierbares  $f$  die Funktion  $Tf$  nicht notwendigerweise wohldefiniert.

**24.21. Distributionen mit kompaktem Träger:** Grundidee für Distributionen oder “verallgemeinerte Funktionen” ist es, Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $x \mapsto f(x)$  lineare Abbildungen  $T_f : \varphi \mapsto T_f(\varphi) := \int f(x)\varphi(x) dx$  zuzuordnen. Dabei sind die  $\varphi$  “Testfunktionen” aus einem geeigneten Vektorraum  $\mathcal{G}$ . Allgemeiner kann man dann beliebige lineare Abbildungen  $T : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\varphi \mapsto T(\varphi)$  betrachten, für die man in einem geeigneten Sinne “Stetigkeit” fordert. Viele Operationen für Funktionen  $f$  wie Differentiation, Multiplikation mit einer gegebenen Funktion, Faltung oder Fouriertransformation lassen sich für Distributionen  $T$  definieren, wenn man sich zunächst verdeutlicht, wie sie auf Distributionen der Form  $T_f$  wirken. Wir werden hier als Testfunktionenraum den Raum  $\mathcal{E} := C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  verwenden.

**Definition:** Wir bezeichnen mit  $\mathcal{E}'$  den komplexen Vektorraum aller linearen Abbildungen  $T : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{C}$ , für die es  $a \geq 0$ ,  $m \in \mathbb{N}_0$  und  $C > 0$  so gibt, dass für alle  $\varphi \in \mathcal{E}$  gilt

$$|T(\varphi)| \leq C \sum_{j=0}^m \sup_{|x| \leq a} |\varphi^{(j)}(x)|.$$

Das kleinstmögliche  $m \in \mathbb{N}_0$  heißt *Ordnung von  $T$* .

Beachte: Ist  $\varphi \in \mathcal{E}$  mit  $\varphi(x) = 0$  für alle  $x \notin [-a, a]$ , so folgt  $T(\varphi) = 0$ . Man sagt dazu “ $T = 0$  auf  $\mathbb{R} \setminus [-a, a]$ ” oder “ $T$  hat Träger in  $[-a, a]$ ”.

**Beispiele:** (1) Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  stetig und  $a > 0$  so, dass  $f(x) = 0$  für alle  $x \notin [-a, a]$ . Dann gilt

$$|T_f(\varphi)| = \left| \int_{-a}^a \varphi(x)f(x) dx \right| \leq \|f\|_1 \sup_{|x| \leq a} |\varphi(x)|,$$

dh  $T_f \in \mathcal{E}'$  hat Ordnung 0. Außerdem gilt

$$T_f(\varphi) = 0 \text{ für alle } \varphi \in \mathcal{E} \implies f = 0.$$

(2) Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  absolut integrierbar und  $a > 0$  so, dass  $f(x) = 0$  für alle  $x \notin [-a, a]$ . Auch hier gilt

$$|T_f(\varphi)| \leq \|f\|_1 \sup_{|x| \leq a} |\varphi(x)|,$$

$T_f \in \mathcal{E}'$  hat Ordnung 0, und  $T_f = 0 \implies \|f\|_1 = 0$ .

(3) Sei  $b \in \mathbb{R}$  und  $\delta_b(\varphi) := \varphi(b)$  für  $\varphi \in \mathcal{E}$ . Für  $a := |b|$  gilt dann

$$|\delta_b(\varphi)| = |\varphi(b)| \leq \sup_{|x| \leq a} |\varphi(x)|,$$

dh  $\delta_b \in \mathcal{E}'$  hat Ordnung 0.

**24.22. Operationen mit Distributionen: (1) Ableitung:** Ist  $f$  wie in Beispiel 24.21(1), aber stetig differenzierbar, so gilt mittels partieller Integration

$$T_{f'}(\varphi) = \int_{-a}^a f'(x)\varphi(x) dx = \int_{-a}^a f(x)(-\varphi'(x)) dx = T_f(-\varphi').$$

Definiere also  $T' \in \mathcal{E}'$  für  $T \in \mathcal{E}'$  durch

$$T'(\varphi) := T(-\varphi'), \quad \varphi \in \mathcal{E}.$$

**(2) Multiplikation mit  $\psi \in \mathcal{E}$ :** Ist  $f$  wie in Beispiel 24.21(1) oder (2), so gilt

$$T_{\psi f}(\varphi) = \int_{-a}^a f(x)\psi(x)\varphi(x) dx = T_f(\underbrace{\psi\varphi}_{\in \mathcal{E}}).$$

Definiere also  $\psi T \in \mathcal{E}'$  für  $\psi \in \mathcal{E}$  und  $T \in \mathcal{E}'$  durch

$$(\psi T)(\varphi) := T(\psi\varphi), \quad \psi \in \mathcal{E}.$$

**(3) Fouriertransformation:** Ist  $f$  wie in Beispiel 24.21(1) oder (2), so gilt

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-a}^a e^{-ix\xi} f(x) dx = T_f(e^{-i\xi(\cdot)}).$$

Definiere also für  $T \in \mathcal{E}'$ :

$$\hat{T} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \xi \mapsto \hat{T}(\xi) := T(e^{-i\xi(\cdot)}).$$

**(4) Faltung mit  $\psi \in \mathcal{E}$ :** Ist  $f$  wie in Beispiel 24.21(1) oder (2) und  $\psi \in \mathcal{E}$ , so gilt

$$f * \psi(t) = \int_{-a}^a f(x)\psi(t-x) dx = T_f(\psi(t-\cdot)).$$

Definiere also für  $T \in \mathcal{E}'$  und  $\psi \in \mathcal{E}$ :

$$T * \psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad t \mapsto T(\psi(t-\cdot)).$$

**Beispiele:** (1) Für  $b \in \mathbb{R}$  gilt  $\delta_b(\varphi) = -\varphi'(b)$ ,  $\delta_b^{(k)}(\varphi) = (-1)^k \varphi^{(k)}(b)$ . Für  $\psi \in \mathcal{E}$  gilt  $\psi\delta_b(\varphi) = \delta_b(\psi\varphi) = \psi(b)\varphi(b)$  und

$$(\psi\delta_b)'(\varphi) = \psi\delta_b(-\varphi') = \delta_b(-\varphi'\psi) = -\varphi'(b)\psi(b) = -(\varphi\psi)'(b) + \psi'(b)\varphi(b) = (\psi\delta_b' + \psi'\delta_b)(\varphi).$$

Die Produktregel gilt allgemein.

(2) Sei  $b \in \mathbb{R}$ . Dann gilt

$$\widehat{\delta_b}(\xi) = e^{-i\xi b}, \quad \widehat{\delta_b^{(k)}}(\xi) = (i\xi)^k e^{-i\xi b}, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

(3) Für  $b \in \mathbb{R}$  und  $\psi \in \mathcal{E}$  gilt:

$$\delta_b * \psi(t) = \delta_b(\psi(t-\cdot)) = \psi(t-b), \quad t \in \mathbb{R},$$

also  $\delta_b * \psi = \psi(\cdot - b)$ , insbesondere  $\delta_0 * \psi = \psi$ . Weiter ist etwa  $\delta_0' * \psi = \psi'$ .

(4) Für  $T \in \mathcal{E}'$  gilt

$$\widehat{T}'(\xi) = T'(e^{-i\xi(\cdot)}) = T(i\xi e^{-i\xi(\cdot)}) = i\xi \widehat{T}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R},$$

vergleiche 24.7.

**24.23. Weitere Eigenschaften:** (1) Ist  $T \in \mathcal{E}'$ , so ist

$$F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto F(z) := T(e^{-iz(\cdot)})$$

eine holomorphe Fortsetzung von  $\hat{T} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  (ohne Beweis, vergleiche aber 24.5). Es gibt  $C, a > 0$  und  $m \in \mathbb{N}_0$  mit

$$|F(z)| \leq C(1 + |z|)^m \exp(a|\operatorname{Im} z|), \quad z \in \mathbb{C}.$$

(2) Für  $T \in \mathcal{E}'$  und  $\psi \in \mathcal{E}$  gilt  $T * \psi \in \mathcal{E}$  (ohne Beweis). Gilt sogar  $\psi \in \mathcal{S}$ , dh ist  $x \mapsto x^k \psi^{(j)}(x)$  beschränkt für alle  $j, k \in \mathbb{N}_0$ , so hat man auch  $T * \psi \in \mathcal{S}$  (ebenfalls ohne Beweis).

(3) Ist  $T \in \mathcal{E}'$  und  $\psi \in \mathcal{S}$ , so gilt

$$\mathcal{F}(T * \psi)(\xi) = \hat{\psi}(\xi)\hat{T}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Beachte, dass nach Übungsaufgabe  $\hat{\psi} \in \mathcal{S}$  gilt, wegen (2) also auch  $\mathcal{F}(T * \psi) \in \mathcal{S}$ . Für Ableitungen von  $\hat{T}$  gilt eine Regel wie in 24.7.

**24.24. Konvergenz:** Wir sagen, dass eine Folge  $(\psi_k)$  in  $\mathcal{E}$  *distributionell gegen*  $T \in \mathcal{E}'$  *konvergiert*, falls für jedes  $a > 0$  und jede Funktion  $\varphi \in \mathcal{E}$  mit  $\varphi(x) = 0$  für  $x \notin [-a, a]$  gilt:

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \psi_k(x)\varphi(x) dx}_{= \int_{-a}^a \psi_k(x)\varphi(x) dx} \rightarrow T(\varphi), \quad k \rightarrow \infty.$$

**Beispiel:** Sei  $g_t$  wie in 24.16. Dann konvergiert  $(g_{t_k})$  für jede Nullfolge  $(t_k)$  distributionell gegen  $\delta_0$  (verwende den Satz in 24.19), dh  $g_t \rightarrow \delta_0$  distributionell für  $t \rightarrow 0+$ .

Ist allgemeiner  $T \in \mathcal{E}'$ , so definiert

$$u(t, x) := (T * g_t)(x), \quad t > 0, x \in \mathbb{R},$$

eine Funktion  $u \in C^\infty((0, \infty) \times \mathbb{R})$ , welche die Wärmeleitungsgleichung  $u_t = u_{xx}$  in  $(0, \infty) \times \mathbb{R}$  löst (man beachte auch 24.23(3) und  $g_t \in \mathcal{S}$  für jedes  $t > 0$ ).

Es gilt  $u(t, \cdot) \rightarrow T$  distributionell für  $t \rightarrow 0+$  (ohne Beweis), also ist obiges  $u$  eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung mit Anfangswert  $T \in \mathcal{E}'$ . Man erhält diese Lösung auch, wenn man wie in 24.16 über die Fouriertransformation argumentiert.