Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets, Johanna Richter, M.Sc.
Tobias Ried, M.Sc., Tobias Schmid, M.Sc.

SS2017
23.06.2017

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 9. Übungsblatt

Aufgabe 49: (Übung)

(a) Sei $B(0,r) := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\vec{x}\|^2 < r^2\}$ eine offene Kugel mit Radius $r > 0$. Betrachten Sie die Funktionenfamilie $(\varphi_\sigma)_{\sigma>0}$, welche durch

$$\varphi_\sigma(\vec{x}) = \frac{e^{-\frac{\|\vec{x}\|^2}{2\sigma}}}{\sqrt{(2\pi\sigma)^3}}$$

für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ und alle $\sigma > 0$, definiert ist.

(i) Zeigen Sie, dass für alle $\sigma, \delta > 0$ gilt

$$\lim_{r\to\infty} \int_{B(0,r)} \varphi_\sigma(\vec{x}) d\vec{x} = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{\sigma\to 0^+} \lim_{r\to\infty} \int_{B(0,r)\setminus B(0,\delta)} \varphi_\sigma(\vec{x}) d\vec{x} = 0.$$

(ii) Sei $f \in C^0(\mathbb{R}^3)$ mit $f(\vec{x}) = 0$ falls $\|\vec{x}\| > 1$. Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{\sigma\to 0^+} \int_{B(0,1)} f(\vec{x})\varphi_\sigma(\vec{x})\, d\vec{x}$$

(b) Sei $f(\vec{x}) = \ln(\|\vec{x}\|)$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ und $g(\vec{x}) = \frac{1}{2}\|\vec{x}\|^2$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$. Berechnen Sie das Integral

$$\oint_{\partial(B(0,2)\setminus B(0,1))} g \frac{\partial f}{\partial \vec{N}}\, \mathrm{d}s.$$

Dabei bezeichnet $\vec{N}$ stets die *äußere Einheitsnormale* des Gebiets $B(0,2)\setminus B(0,1)$.

Lösungsvorschlag

(a) (i) Wir zeigen $\lim_{r\to\infty} \int_{B(0,r)} e^{-\frac{\|\vec{x}\|^2}{2}} d\vec{x} = \sqrt{(2\pi)^3}$. Dann folgt mit der Transformationsformel aus Abschnitt 21.3 der Vorlesung angewandt auf die Abbildung $g_\sigma(\vec{x}) = \sqrt{\sigma}\vec{x}$ die Gleichung

$$\begin{aligned}\lim_{r\to\infty} \int_{B(0,r)} e^{-\frac{\|\vec{x}\|^2}{2\sigma}} d\vec{x} &= \sigma^{\frac{3}{2}} \lim_{r\to\infty} \int_{g_\sigma(B(0,r/\sqrt{\sigma}))} e^{-\frac{\|g_\sigma^{-1}(\vec{x})\|^2}{2}} |\det(g_\sigma^{-1})'(\vec{x})| d\vec{x} \\ &= \sigma^{\frac{3}{2}} \lim_{r\to\infty} \int_{B(0,r/\sqrt{\sigma})} e^{-\frac{\|\vec{x}\|^2}{2}} d\vec{x} = \sqrt{(2\pi\sigma)^3}.\end{aligned}$$

Nach Vorlesung Abschnitt 21.6 können wir Kugelkoordinaten verwenden und berechnen

$$\int_{B(0,r)} e^{-\frac{\|\vec{x}\|^2}{2}} d\vec{x} = 2^{\frac{3}{2}} \int_{B(0,r/\sqrt{2})} e^{-\|\vec{x}\|^2} d\vec{x} = 2^{\frac{3}{2}} \iiint_{[0,r/\sqrt{2}]\times[0,2\pi]\times[-\pi/2,\pi/2]} e^{-s^2} s^2 \cos(\theta)\ d(s,\varphi,\theta)$$

$$= 2^{\frac{3}{2}} \int_0^{r/\sqrt{2}} e^{-s^2} s^2 \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(\theta)\ d\theta\ d\varphi\ ds = 2^{\frac{3}{2}} \cdot 4\pi \int_0^{\frac{r}{\sqrt{2}}} e^{-s^2} s^2\ ds$$

$$= 2^{\frac{3}{2}} \cdot 4\pi \left[-\frac{1}{2} e^{-s^2} s \Big|_0^{r/\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{r}{\sqrt{2}}} e^{-s^2}\ ds \right].$$

Nach Vorlesung Abschnitt 21.4, Beispiel (3) existiert der Grenzwert $\int_0^\infty e^{-s^2}\ ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Damit folgt also

$$\lim_{r\to\infty} \int_{B(0,r)} e^{-\frac{\|\vec{x}\|^2}{2}} d\vec{x} = 2^{\frac{3}{2}} \cdot 2\pi \int_0^\infty e^{-s^2}\ ds = (\sqrt{2\pi})^3.$$

Weiter gilt wie oben für jedes $r > \delta > 0$ die Transformationsregel

$$\int_{B(0,r)\setminus B(0,\delta)} e^{-\frac{\|\vec{x}\|^2}{2\sigma}} d\vec{x} = \sigma^{\frac{3}{2}} \int_{B(0,r/\sqrt{\sigma})\setminus B(0,\delta/\sqrt{\sigma})} e^{-\frac{\|\vec{x}\|^2}{2}} d\vec{x}.$$

Es gilt zudem wie oben, dass

$$\int_{B(0,r/\sqrt{\sigma})\setminus B(0,\delta/\sqrt{\sigma})} e^{-\frac{\|\vec{x}\|^2}{2}} d\vec{x} = 2^{\frac{3}{2}} \iiint_{[\delta/\sqrt{2\sigma},r/\sqrt{2\sigma}]\times[0,2\pi]\times[-\pi/2,\pi/2]} e^{-s^2} s^2 \cos(\theta)\ d(s,\varphi,\theta)$$

$$= 2^{\frac{3}{2}} \cdot 4\pi \left[-\frac{1}{2} e^{-s^2} s \Big|_{\delta/\sqrt{2\sigma}}^{r/\sqrt{2\sigma}} + \frac{1}{2} \int_{\delta/\sqrt{2\sigma}}^{r/\sqrt{2\sigma}} e^{-s^2}\ ds \right].$$

Für den ersten Term gilt

$$\lim_{r\to\infty} -\frac{1}{2} e^{-s^2} s \Big|_{\delta/\sqrt{2\sigma}}^{r/\sqrt{2\sigma}} = \frac{1}{2} e^{-\delta^2/2\sigma} \frac{\delta}{\sqrt{2\sigma}}$$

das heißt

$$\lim_{\sigma\to 0^+} \lim_{r\to\infty} -\frac{1}{2} e^{-s^2} s \Big|_{\delta/\sqrt{2\sigma}}^{r/\sqrt{2\sigma}} = \lim_{\sigma\to 0^+} \frac{1}{2} e^{-\delta^2/2\sigma} \frac{\delta}{\sqrt{2\sigma}} = \lim_{\sigma\to\infty} \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}\delta^2\sigma} \frac{\delta}{\sqrt{2}} \sqrt{\sigma} = 0.$$

Für den zweiten Term folgt

$$\lim_{\sigma\to 0^+} \lim_{r\to\infty} \frac{1}{2} \int_{\delta/\sqrt{2\sigma}}^{r/\sqrt{2\sigma}} e^{-s^2}\ ds = \lim_{\sigma\to 0^+} \frac{1}{2} \int_{\delta/\sqrt{2\sigma}}^{\infty} e^{-s^2}\ ds = 0.$$

Insgesamt erhalten wir

$$\lim_{r\to\infty} \int_{B(0,r)\setminus B(0,\delta)} \varphi_\sigma(\vec{x})\ d\vec{x} = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \lim_{r\to\infty} \int_{B(0,r/\sqrt{\sigma})\setminus B(0,\delta/\sqrt{\sigma})} e^{-\frac{\|\vec{x}\|^2}{2}}\ d\vec{x} \to 0,\ \ \sigma \to 0^+$$

(ii) Sei $f \in C^0(\mathbb{R}^3)$ mit $f(\vec{x}) = 0$ falls $\|\vec{x}\| > 1$. Dann folgt aus Teill (i) für jedes $\sigma, \delta > 0$

$$\left| \int_{B(0,1)} f(\vec{x})\varphi_\sigma(\vec{x})\ d\vec{x} - f(0) \right| \leq \left| \lim_{r\to\infty} \left(\int_{B(0,r)} (f(\vec{x}) - f(0))\varphi_\sigma(\vec{x})\ d\vec{x} \right) \right|$$

$$\leq \left| \int_{B(0,\delta)} (f(\vec{x}) - f(0))\varphi_\sigma(\vec{x})\ d\vec{x} \right|$$

$$+ \left| \lim_{r\to\infty} \left(\int_{B(0,r)\setminus B(0,\delta)} (f(\vec{x}) - f(0))\varphi_\sigma(\vec{x})\ d\vec{x} \right) \right|.$$

Da f stetig ist wählen wir zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass $|f(\vec{x}) - f(0)| < \varepsilon$ falls $\vec{x} \in B(0,\delta)$. Damit folgt erneut mit Teil (i)

$$\left| \int_{B(0,1)} f(\vec{x})\varphi_\sigma(\vec{x})\ d\vec{x} - f(0) \right| \leq \varepsilon + 2 \sup_{\vec{x}\in\mathbb{R}^3} |f(\vec{x})| \lim_{r\to\infty} \int_{B(0,r)\setminus B(0,\delta)} \varphi_\sigma(\vec{x})\ d\vec{x} \to \varepsilon.$$

für $\sigma \to 0^+$. Das heißt es folgt, da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war,

$$\int_{B(0,1)} f(\vec{x})\varphi_\sigma(\vec{x})\ d\vec{x} \to f(0), \quad \sigma \to 0^+.$$

(b) Wir rechnen zunächst $(\nabla f)(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^2}$, $(\nabla g)(\vec{x}) = \vec{x}$ und

$$\Delta f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \vec{x_i}/\|\vec{x}\|^2 = 0.$$

Das heißt f ist eine *harmonische* Funktion. Wir benutzen die Green'sche Formel zur Berechnung des Integrals und folgern

$$\oint_{\partial(B(0,2)\setminus B(0,1))} g\frac{\partial f}{\partial \vec{N}}\ \mathrm{d}s = \int_{B(0,2)\setminus B(0,1)} g\Delta f + \nabla g\cdot\nabla f\ d\vec{x} = \int_{B(0,2)\setminus B(0,1)} d\vec{x} = A(B(0,2)\setminus B(0,1)),$$

wobei $A(B(0,2)\setminus B(0,1))$ den Flächeninhalt von $B(0,2)\setminus B(0,1)$ bezeichnet. Mit Übungsaufgabe 43 auf dem Übungsblatt 8 folgt somit

$$\oint_{\partial(B(0,2)\setminus B(0,1))} g\frac{\partial f}{\partial \vec{N}}\ \mathrm{d}s = (2^2 - 1)\pi = 3\pi.$$

Aufgabe 50: (Übung)
Berechnen Sie mit Hilfe der Zylinderkoordinaten:

(a) $\int_A xyz\ \mathrm{d}(x,y,z)$, $A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1,\ x^2 + y^2 \leq 1\right\}$

(b) $\int_B z(x^3 + xy^2)\ \mathrm{d}(x,y,z)$, $B = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -\pi \leq z \leq \pi,\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ \left|\frac{y}{x}\right| \leq 1\right\}$

Lösungsvorschlag

(a) Mit Hilfe der Zylinderkoordinaten ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\int_A xyz\mathrm{d}(x,y,z) &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho\cos(\varphi)\rho\sin(\varphi)z\rho\ d\rho\ d\varphi\ \mathrm{d}z \\
&= \int_0^1 z\mathrm{d}z \cdot \int_0^{2\pi} \cos(\varphi)\sin(\varphi)d\varphi \cdot \int_0^1 \rho^3 d\rho \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left[\sin^2(\varphi)\right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \cdot \frac{1}{4} = 0.
\end{aligned}$$

(b) Mit Hilfe der Zylinderkoordinaten ergibt sich:

$$\begin{aligned}\int_B z(x^3+xy^2)\mathrm{d}(x,y,z) &= \int_{-\pi}^{\pi} z\int_1^2 \rho^3\left(\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos(\varphi)d\phi+\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\cos(\varphi)d\phi\right)\rho d\rho\mathrm{d}z\\ &= 0\cdot\frac{7}{5}\cdot\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}\right)=0.\end{aligned}$$

Aufgabe 51: (Übung)
Es sei D das Dreieck mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(1,0)$ und $(0,1)$. Das Vektorfeld $\vec{F}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ sei durch

$$\vec{F}(x,y)=\begin{pmatrix}x^2+xy\\x^2y-y^2\end{pmatrix}$$

gegeben. Berechnen Sie das Integral $\int_{\partial D}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{s}$

(a) direkt und

(b) mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes.

Lösungsvorschlag

(a) Seien $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3:[0,1]\to\mathbb{R}^2$ definiert durch

$$\gamma_1(t)=(t,0),\quad \gamma_2(t)=(1-t,t),\quad \gamma_3(t)=(0,1-t)$$

für alle $t\in[0,1]$. Dann ist $\gamma=\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3$ eine doppelpunktfreie Parameterisierung von ∂D. Dabei liegt D immer „links von γ“. Es gilt nach Definition des Kurvenintegrals:

$$\begin{aligned}\int_{\partial D}\vec{F}\cdot d\vec{s} &= \int_0^1\vec{F}(\gamma_1(t))\cdot\dot{\gamma_1}(t)\mathrm{d}t+\int_0^1\vec{F}(\gamma_2(t))\cdot\dot{\gamma_2}(t)\mathrm{d}t+\int_0^1\vec{F}(\gamma_3(t))\cdot\dot{\gamma_3}(t)\mathrm{d}t\\ &= \int_0^1[(t^2)]+[-((1-t)^2+(1-t)t)+((1-t)^2t-t^2)]+[(1-t)^2]\mathrm{d}t\\ &= \int_0^1-(1-t)t+(1-t)^2t\mathrm{d}t=\int_0^1(1-t)t(1-t-1)\mathrm{d}t\\ &= \int_0^1 t^3-t^2\mathrm{d}t=\frac{1}{4}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{12}.\end{aligned}$$

(b) Es gilt nach dem Gaußschen Integralsatz im $\mathbb{R}^2$ (vgl. Abschnitt 20.6 der Vorlesung):

$$\begin{aligned}\int_{\partial D}\vec{F}\cdot d\vec{s} &= \int_D\frac{\partial\vec{F}_2}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial\vec{F}_1}{\partial y}(x,y)\mathrm{d}(x,y)=\int_0^1\int_0^{1-x}2xy-x\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 x(1-x)^2-x(1-x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x(1-x)(1-x-1)\mathrm{d}x=-\int_0^1 x^2(1-x)\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 x^3-x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{4}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{12}.\end{aligned}$$

Aufgabe 52: (Tutorium)
Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\int_A (x^2+y^2)^2 e^{2(1-z)^7}\,\mathrm{d}(x,y,z),\ A = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 0\le z\le 1,\ x^2+y^2\le (1-z)^2\right\}$

(b) $\int_B \sin(z)\,\mathrm{d}(x,y,z),\ B = \{x,y,z\ge 0,\ x+y+2z\le 1\}$

Lösungsvorschlag

(a) Mit Hilfe der Zylinderkoordinaten ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\int_A (x^2+y^2)^2 e^{2(1-z)^7}\mathrm{d}(x,y,z) &= \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{1-z} \rho^4 e^{2(1-z)^7}\rho\ d\rho\ d\phi\ \mathrm{d}z \\
&= 2\pi\int_0^1 e^{2(1-z)^7}\left[\frac{\rho^6}{6}\right]_{\rho=0}^{\rho=1-z}\mathrm{d}z = \frac{\pi}{3}\int_0^1 e^{2(1-z)^7}(1-z)^6\ \mathrm{d}z \\
&\overset{x=1-z}{=} \frac{\pi}{3}\int_0^1 e^{2x^7}x^6\ \mathrm{d}x = \frac{\pi}{3}\cdot\frac{1}{14}\cdot\left[e^{2x^7}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{\pi}{42}(e^2-1).
\end{aligned}$$

(b) Es gilt nach dem Abschnitt 19.6 der Vorlesung):

$$\begin{aligned}
\int_B \sin(z)\mathrm{d}(x,y,z) &= \int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{\frac{1-x-y}{2}} \sin(z)\ \mathrm{d}z\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x = -\int_0^1\int_0^{1-x}\left[\cos(z)\right]_{z=0}^{z=\frac{1-x-y}{2}}\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1\int_0^{1-x} 1-\cos\left(\frac{1-x-y}{2}\right)\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 (1-x) + 2\left[\sin\left(\frac{1-x-y}{2}\right)\right]_{y=0}^{y=1-x}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 (1-x) - 2\sin\left(\frac{1-x}{2}\right)\ \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} - 4\left[\cos\left(\frac{1-x}{2}\right)\right]_{x=0}^{x=1} = -\frac{7}{2} + 4\cos\left(\frac{1}{2}\right).
\end{aligned}$$

Aufgabe 53: (Tutorium)
Es sei $C\subseteq\mathbb{R}^2$ gegeben durch $C = [0,1]\times[0,2]\cup[0,2]\times[1,2]$. Berechnen Sie die Integrale

$$\int_C y^2 - x^2\mathrm{d}(x,y) \quad \text{und} \quad \int_C e^{x-y} - e^{x+y}\mathrm{d}(x,y)$$

(a) direkt und

(b) mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes.

Lösungsvorschlag

(a) Wir zerlegen die Menge $C = C_1 \cup C_2$, wobei

$$C_1 = [0,1]^2 \quad \text{und} \quad C_2 = [0,2] \times [1,2].$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
\int_C y^2 - x^2 \mathrm{d}(x,y) &= \int_{C_1} y^2 \mathrm{d}(x,y) - \int_{C_1} x^2 \mathrm{d}(x,y) + \int_{C_2} y^2 \mathrm{d}(x,y) - \int_{C_2} x^2 \mathrm{d}(x,y) \\
&= \int_0^1 \int_0^1 y^2 \; dx \; dy - \int_0^1 \int_0^1 x^2 \; dx \; dy + \int_0^2 \int_1^2 y^2 \; dy \; dx - \int_0^2 \int_1^2 x^2 \; dy \; dx \\
&= \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{14}{3} - \frac{8}{3} = 2,
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\int_C e^{x-y} - e^{x+y} \mathrm{d}(x,y) &= \int_{C_1} e^{x-y} \mathrm{d}(x,y) - \int_{C_1} e^{x+y} \mathrm{d}(x,y) + \int_{C_2} e^{x-y} \mathrm{d}(x,y) - \int_{C_2} e^{x+y} \mathrm{d}(x,y) \\
&= \int_0^1 \int_0^1 e^{x-y} dx \; dy - \int_0^1 \int_0^1 e^{x+y} dx \; dy \\
&\quad + \int_0^2 \int_1^2 e^{x-y} dy \; dx - \int_0^2 \int_1^2 e^{x+y} dy \; dx \\
&= -2 + e^{-1} + e - e^2 + 2e - 1 - 1 + e + e^{-2} - e^{-1} - (e^4 - e^3 - e^2 + e) \\
&= -e^4 + e^3 + e^{-2} + 3e - 4.
\end{aligned}$$

(b) Wir definieren die Kurven

$$\begin{aligned}
\gamma_1(t) &= (0,t), & t \in [0,2], \\
\gamma_2(t) &= (t,2), & t \in [0,2], \\
\gamma_3(t) &= (2, 2-t), & t \in [0,1], \\
\gamma_4(t) &= (2-t, 1), & t \in [0,1], \\
\gamma_5(t) &= (1, 1-t), & t \in [0,1], \\
\gamma_6(t) &= (1-t, 0), & t \in [0,1].
\end{aligned}$$

Dann ist die zusammengesetzte Kurve $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_5 + \gamma_6$ stückweise stetig differenzierbar, doppelpunktfrei und es gilt $\mathrm{spur}(\gamma) = \partial C$. Da beim durchlaufen von γ das Gebiet C jedoch "rechts der Kurve liegt" bilden wir den *inversen Weg* $\tilde{\gamma}$ (d.h $\tilde{\gamma}$ hat im Vergleich zu γ inverse Umlaufrichtung). Um den Integralsatz von Gauß (Abschnitt 20.6) anwenden zu können, müssen wir C^1 Vektorfelder $\vec{c}$, $\vec{w}$ finden mit

$$\frac{\partial}{\partial x} \vec{v}_2(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} \vec{v}_1(x,y) = y^2 - x^2,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \vec{w}_2(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} \vec{w}_1(x,y) = e^{x-y} - e^{x+y}.$$

Wir wählen also

$$\vec{v}(x,y) = (x^2 y, y^2 x) \quad \text{und} \quad \vec{w}(x,y) = (e^{x+y}, e^{x-y}), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

und erhalten mit dem Integralsatz

$$\begin{aligned}
\int_C y^2 - x^2 \mathrm{d}(x,y) &= \int_{\tilde{\gamma}} \vec{v} \cdot d\vec{s} = -\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} \\
&= -\int_0^2 (2t^2, 4t) \cdot (1,0)\ dt - \int_0^1 (4(2-t), 2(2-t)^2) \cdot (0,-1)\ dt \\
&\quad -\int_0^1 ((2-t)^2, 2-t) \cdot (-1,0)\ dt - \int_0^1 (1-t, (1-t)^2) \cdot (0,-1)\ dt \\
&= -\int_0^2 2t^2\ dt + 3\int_0^1 (2-t)^2\ dt + \int_0^1 (1-t)^2\ dt = 2.
\end{aligned}$$

Weiter gilt ebenfalls mit dem Integralsatz

$$\begin{aligned}
\int_C e^{x-y} - e^{x+y} \mathrm{d}(x,y) &= \int_{\tilde{\gamma}} \vec{w} \cdot d\vec{s} = -\int_\gamma \vec{w} \cdot d\vec{s} \\
&= -\int_0^2 e^{-t}\ dt - \int_0^2 e^{t+2}\ dt + 2\int_0^1 e^t\ dt + \int_0^1 e^{3-t}\ dt + \int_0^1 e^{1-t}\ dt \\
&= -e^4 + e^3 + e^{-2} + 3e - 4.
\end{aligned}$$

Aufgabe 54: (Tutorium)

(a) Bestimmen Sie für $a, b, c > 0$ das Volumen $\mathrm{vol}(E) = \iiint_E \mathrm{d}(x,y,z)$ des *Ellipsoids*

$$E := \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \leqslant 1 \right\},$$

(i) mit Hilfe des Prinzips von Cavalieri (bzw. Integration über projezierbare Teilmengen)

(ii) mit Hilfe der Koordinaten

$$\begin{aligned}
&\Phi(r, \theta_1, \theta_2) = r(a\cos(\theta_1)\cos(\theta_2),\ b\sin(\theta_1)\cos(\theta_2),\ c\sin(\theta_2)), \\
&(r, \theta_1, \theta_2) \in [0,1] \times [0, 2\pi] \times [-\pi/2, \pi/2].
\end{aligned}$$

(b) Sei $B := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \|(x,y,z)\| \leqslant 2\}$ ein kugelförmiger Körper mit der Massendichte

$$\rho(x,y,z) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2+y^2+z^2} & , 0 \leqslant \|(x,y,z)\| \leqslant 1, \\ 2 & , 1 < \|(x,y,z)\| \leqslant 2. \end{cases}$$

Berechnen Sie die gesamte Masse

$$\int_B \rho(x,y,z) \mathrm{d}(x,y,z).$$

Lösungsvorschlag

(a) (i) Wir definieren für festes $|z| \leq c$ den $z-$*Schnitt von* E durch

$$E_z := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \leqslant 1 - \left(\frac{z}{c}\right)^2 \right\}.$$

Diese Menge ist eine Ellipse und in der Notation von Übungsblatt 08, Aufgabe 43 gilt für den Flächeninhalt

$$A(E_z) = \iint_{E_z} \mathrm{d}(x,y) = \left(1 - \left(\frac{z}{c}\right)^2\right) \pi ab.$$

Dann folgt aus dem Prinzip von Cavalieri (Abschnitt 21.2)

$$\iiint_E \mathrm{d}(x,y,z) = \int_{-c}^{c} \iint_{E_z} \mathrm{d}(x,y)\ dz = \pi abc \int_{-1}^{1} 1 - \tilde{z}^2\ d\tilde{z} = \frac{4}{3}\pi abc.$$

(ii) Wie gefordert benutzen wir die Koordinaten

$$\Phi(r,\theta_1,\theta_2) = r(a\cos(\theta_1)\cos(\theta_2),\ b\sin(\theta_1)\cos(\theta_2),\ c\sin(\theta_2)),$$
$$(r,\theta_1,\theta_2) \in [0,1) \times [0,2\pi] \times [-\pi/2, \pi/2]$$

und wenden die Transformationsformel zur Berechnung des Integrals an. Es gilt

$$\Phi'(r,\theta_1,\theta_2) = \begin{pmatrix} a\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) & -ar\sin(\theta_1)\cos(\theta_2) & -ar\cos(\theta_1)\sin(\theta_2) \\ b\sin(\theta_1)\cos(\theta_2) & br\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) & -br\sin(\theta_1)\sin(\theta_2) \\ c\sin(\theta_2) & 0 & cr\cos(\theta_2) \end{pmatrix}.$$

Das heißt ähnlich wie für die Kugelkoordinaten folgt

$$|\det \Phi'(r,\theta_1,\theta_2)| = abcr^2\cos(\theta_2).$$

Damit folgt schließlich für $\mathrm{vol}(E) = \iiint_E \mathrm{d}(x,y,z)$ die Gleichung

$$\iiint_E \mathrm{d}(x,y,z) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} abcr^2 \cos(\theta_2)\ d\theta_2\ d\theta_1\ dr = \frac{2}{3}\pi abc \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(\theta_2)\ d\theta_2 = \frac{4}{3}\pi abc.$$

(b) Definiere

$$K := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leqslant 1\} \quad \text{und}$$
$$S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 2\}.$$

Dann gilt $B = K \cup S$ und $K \cap S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$. Anhand von Kugelkoordinaten sieht man sofort, dass

$$\int_{K\cap S} \rho(x,y,z)\mathrm{d}(x,y,z) = 0.$$

Damit folgt, dass

$$\begin{aligned}
\int_B \rho(x,y,z)\ \mathrm{d}(x,y,z) &= \int_K \rho(x,y,z)\mathrm{d}(x,y,z) + \int_S \rho(x,y,z)\mathrm{d}(x,y,z) \\
&= \int_0^1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{1+r^2}\cos(\vartheta)\ d\varphi\ d\vartheta dr + \int_1^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} 2r^2\cos(\vartheta)\ d\varphi\ d\vartheta\ dr \\
&= 4\pi \int_0^1 1 - \frac{1}{1+r^2}\ dr + \frac{56}{3}\pi = 4\pi[r - \arctan(r)]_{r=0}^1 + \frac{56}{3}\pi \\
&= 4\pi - \pi^2 + \frac{56}{3}\pi = \frac{68}{3}\pi - \pi^2.
\end{aligned}$$