

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

4. Übungsblatt

Aufgabe 20: Ein Funktional ϕ ist einfach eine Funktion von einem \mathbb{K} -Vektorraum V in den Körper K . Wir definieren die folgenden Funktionalen von dem Vektorraum \mathbb{C}^3 nach \mathbb{C} als

1. $\phi(x) = x_1 + 2x_2 + 3x_3$
2. $\phi(x) = 0$
3. $\phi(x) = |x_1|$
4. $\phi(x) = \operatorname{Re} x_1$

wo $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Welche der obigen Funktionalen sind linear? Finden Sie, für die linearen Funktionalen, ein Basis für $\ker(\phi)$.

Aufgabe 21: Sei ein Abbildung $A : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^2$ die für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$ definiert ist als

1. $Ax = \begin{pmatrix} x_1 \\ \operatorname{Im}(x_2 + x_3) \end{pmatrix}$,
2. $Ax = \begin{pmatrix} 2x_2 + ix_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix}$,
3. $Ax = \begin{pmatrix} x_2 - 2x_3^2 \\ x_1 \end{pmatrix}$,
4. $Ax = 0$.

Welchen der obigen Abbildungen sind linear? Für linearen Abbildungen finden Sie $\operatorname{rang}(A)$ und $\ker(A)$.

Aufgabe 22: Sei $X = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ ein Basis von \mathbb{C}^3 und $Y = \left(\begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ ein

Basis von \mathbb{C}^2 . Schreiben Sie die Abbildung $Ax = \begin{pmatrix} 2x_2 + ix_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix}$ in Matrixform, wenn

1. für \mathbb{C}^3 und \mathbb{C}^2 die Standardbasen genommen,
2. für \mathbb{C}^3 der Basis X und für \mathbb{C}^2 der Standardbasis genommen,
3. für \mathbb{C}^3 der Standardbasis und für \mathbb{C}^2 der Basis Y genommen,
4. für \mathbb{C}^3 der Basis X und für \mathbb{C}^2 der Basis Y genommen.

Aufgabe 23: Sei Pol_3 der Vektorraum der reellen Polynome von Grad ≤ 2 mit der Basis $(-1+x, 1-x+x^2, x-x^2)$. Ferner sei $A : Pol_3 \rightarrow Pol_3$ die lineare Abbildung $(Ap)(x) = p(x+1)$. Schreiben Sie die Abbildung A in der Basis X .

Aufgabe 24: Sei $X = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ eine Basis von \mathbb{C}^3 und $Y = ((-3))$ eine Basis von \mathbb{C} . Schreiben Sie das Funktional $\phi(x) = x_1 + 2x_2 + 3x_3$ in Matrixform für \mathbb{C}^3 mit der Basis X und \mathbb{C}^1 mit der Basis Y .

Hinweis: In der großen Saalübung werden voraussichtlich die Aufgaben 20, 21 und 23 besprochen. Die restlichen Aufgaben werden in den Tutorien behandelt.