

## Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

### 8. Übungsblatt

#### Aufgabe 45:

- (a) Seien  $\emptyset \neq I$ ,  $(A_j)_{j \in I} \subseteq (\mathbb{R}^n)^I$  und  $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ . Zeigen Sie:
- (i) Ist  $A_j$  offen für jedes  $j \in I$ , so ist auch  $\cup_{j \in I} A_j$  offen.
  - (ii) Sind  $A, B$  abgeschlossen, so ist auch  $A \cup B$  abgeschlossen.
  - (iii) Ist  $A$  offen und  $B$  abgeschlossen, so ist  $A \setminus B$  offen.
- (b) Überprüfen Sie die folgenden Mengen auf offen und abgeschlossen:
- (i)  $M_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + 5y^2 < 1\}$
  - (ii)  $M_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2 - 2xy \geq 3) \wedge (y \geq x)\} \cup \{(0, 0)\}$

#### Aufgabe 46:

Die Funktionen  $f$ ,  $g$  und  $h$  sind für  $(0, 0) \neq (x, y) \in \mathbb{R}^2$  durch

$$f(x, y) := \frac{xy^2}{x^2 + y^2}, \quad g(x, y) := \frac{xy^2}{x^2 + y^4}, \quad h(x, y) := \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}$$

gegeben und es sei  $f(0, 0) := g(0, 0) := h(0, 0) := 0$ . Zeigen Sie:

- (a) Die Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig.
- (b) Die Funktion  $g$  ist in  $(0, 0)$  nicht stetig, aber  $g$  ist im Nullpunkt „längs jeder Geraden stetig“, d.h. für jedes feste  $\varphi \in \mathbb{R}$  gilt  $g(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) \rightarrow g(0, 0)$  für  $r \rightarrow 0+$ .
- (c) Die Funktion  $h$  ist in  $(0, 0)$  nicht stetig, aber die Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} h(x, y) \quad \text{und} \quad \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} h(x, y)$$

existieren und stimmen mit  $h(0, 0)$  überein.

#### Aufgabe 47:

Die Kurve  $\gamma : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^3$  sei durch

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ \frac{2t}{\pi} \end{pmatrix} \quad \forall t \in [0, 2\pi]$$

gegeben. Ist  $\gamma$  eine reguläre Kurve? Bestimmen Sie ihre Länge  $L(\gamma)$  und ggf. ihre Parameterisierung nach Bogenlänge.

— Bitte wenden! —

**Aufgabe 48:**

Die Kurve  $\eta : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^3$  sei durch

$$\eta(t) = \begin{pmatrix} \arcsin(t) \\ t \\ \sqrt{1-t^2} \end{pmatrix} \quad \forall t \in (-1, 1)$$

gegeben. Ist  $\eta$  eine reguläre Kurve? Bestimmen Sie ihre Länge  $L(\eta)$  und ggf. ihre Parameterisierung nach Bogenlänge.

**Aufgabe 49:**

Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen der folgenden Funktionen:

(a)  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(x, y, z) = (xy^2z^3e^{xy^2z^3}, x^2e^y + \sin(x))$

(b)  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $g(x, y) = (ye^x + x \sinh(y), y^4 + 3x^2 \sin(y), 4y - x^3)$

(c)  $h : (0, \infty) \times (-\pi, \pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $h(r, \varphi, \vartheta) = (r \cos(\varphi) \cos(\vartheta), r \sin(\varphi) \cos(\vartheta), r \sin(\vartheta))$

**Aufgabe 50:**

Betrachten Sie die Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , welche durch

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^3 - x^2y}{x^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

für alle  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  gegeben ist.

- (a) Zeigen Sie, dass  $f$  auf  $\mathbb{R}^2$  stetig ist.
- (b) Berechnen Sie für alle  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  alle partiellen Ableitungen von  $f$ .
- (c) Sind die partiellen Ableitungen von  $f$  im Punkt  $(0, 0)$  stetig?
- (d) Bestimmen Sie die Richtungsableitung  $D_v f(0, 0)$  für jede Richtung  $v$ , für die das möglich ist. Für welche  $v$  gilt  $D_v f(0, 0) = \nabla f(0, 0) \cdot v$ ?
- (e) Existiert für der Funktion  $g$  aus Aufgabe 46 alle Richtungsableitungen im  $(0, 0)$ ;

**Aufgabe 51:**

Sei  $V$  eine endlichdimensionale Vektorraum mit Skalarproduct  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Sei  $L : V \rightarrow V$  ein selbstadjungiert Operator und sei  $g : V \rightarrow \mathbb{R} : u \rightarrow g(u) = \langle u, Lu \rangle$ .

- (a) Zeigen Sie, dass  $D_g(u_0)[v] = 2\operatorname{Re}\langle u, Lv \rangle$ .
- (b) Was ist die Ableitung, wenn  $L$  nicht selbstadjungiert ist.

**Hinweis:** In der großen Saalübung werden voraussichtlich die Aufgaben 46, 50 und 51 besprochen. Die restlichen Aufgaben werden in den Tutorien behandelt.