Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark
Dr. Michal Jex

SS2017/18
16.7.2018

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

13. Übungsblatt

Aufgabe 76:
Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\int_A (x^2+y^2)^2 e^{2(1-z)^7} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, $A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le 1,\, x^2+y^2 \le (1-z)^2\right\}$

(b) $\int_B \sin(z) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, $B = \{x,y,z \ge 0,\, x+y+2z \le 1\}$

(c) $\int_A xyz \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, $A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le 1,\, x^2+y^2 \le 1\right\}$

(d) $\int_B z(x^3+xy^2) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, $B = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -\pi \le z \le \pi,\, 1 \le x^2+y^2 \le 4,\, \left|\frac{y}{x}\right| \le 1\right\}$

Hinweis: Berechnen Sie (c) und (d) mit Hilfe der Zylinderkoordinaten

Aufgabe 77:
Skizzieren Sie die Integrationsbereiche der folgenden Integrale, und berechnen Sie den Integralwert.

(a) $\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$

(b) $\int_0^1 \int_y^{y^2+1} x^2 y \mathrm{d}x\mathrm{d}y$

Aufgabe 78:
Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$, $R > 0$ und $n \in \{2,3\}$. Berechnen Sie das Integral

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus K_R(0)} \|x\|^\alpha \, \mathrm{d}x.$$

Aufgabe 79:
Es sei D das Dreieck mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(1,0)$ und $(0,1)$. Das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei durch

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x^2+xy \\ x^2y - y^2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Berechnen Sie das Integral $\int_{\partial D} f \cdot \mathrm{d}v(s)$
(a) direkt und
(b) mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes.

Aufgabe 80:
Berechnen Sie das Integral

$$\int_B (xy+yz+zx) \mathrm{d}xyz, \quad B = \left\{(x,y,z) : x,y,z \ge 0,\, x^2+y^2+z^2 \le 1\right\}$$

(a) direkt und
(b) mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes.

— Bitte wenden! —

Aufgabe 81:

1. Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $0 < \beta - \alpha \leq 2\pi$ und $r : [\alpha, \beta] \to (0, \infty)$ eine stetige Funktion. Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$D = \{(\rho \cos(\phi), \rho \sin(\phi)) : \phi \in (\alpha, \beta), \rho \in (0, r(\phi))\}.$$

   Zeigen Sie, dass für den Flächeninhalt $A(D)$ die Leibnizsche Sektorformel

$$A(D) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r(\phi)^2 \mathrm{d}\phi$$

   gilt.

2. Sei $G \subseteq \mathbb{R}^3$ ein Gebiet mit C^1-Rand und der äußeren Einheitsnormalen $n : \partial G \to \mathbb{R}^3$. Dann gilt für das Volumen $V(G)$ von G

$$V(G) = \frac{1}{3} \int_{\partial G} \langle x, n(x) \rangle \mathrm{d}\sigma(x).$$

Aufgabe 82:

Es sei γ eine positiv orientierte Parametrisierung des Bogens, welcher durch Schneiden des Zylinders $Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$ mit der Ebene $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$ entstehen. Bestimmen Sie das Kurvenintegral

$$\int_{\gamma} (-y^3, x^3, -z^3) \cdot \mathrm{d}s.$$

1. direkt und

2. mit Hilfe des Integral Satzes von Stokes.

Aufgabe 83:

Es sei $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z > 0\}$ und $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y, z) = (1, xz, xy)$$

für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Berechnen Sie das Oberflächenintegral

$$\int_{M} f(x) \cdot n(x) \mathrm{d}\sigma(x).$$

1. direkt und

2. mit Hilfe des Integral Satzes von Stokes.

Hinweis: In den Tutorien werden voraussichtlich die Aufgaben 76, 77, 78, 79, 82 und 83 besprochen.