Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Klausur

Aufgabe 1: (4 + 6 + 5 + 5 = 20 Punkte) In dieser Aufgabe sind numerische Fehler nicht erlaubt.
Sei $\vec{y} \in \mathbb{R}^3 \setminus \left\{\vec{0}\right\}$ fest. Wir definieren

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad T\vec{x} = \vec{x} \times \vec{y} := (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1)\,.$$

Berechnen Sie für die lineare Abbildung T:

(a) die Transponierte T^t,
(b) die Eigenwerte von T,
(c) den Kern(T) und
(d) das Bild(T).

Aufgabe 2: (12 + 8 = 20 Punkte)

(a) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine $n \times n$ Matrix, $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine $m \times n$ Matrix, $C \in \mathbb{R}^{n\times m}$ eine $n \times m$ Matrix und $D \in \mathbb{R}^{m\times m}$ eine invertierbare Matrix. Ferner sei M die Blockmatrix

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie:
(a) $\det(M) = \det(D)\det(A - BD^{-1}C)$,
(b) sei $CD = DC$, dann ist $\det(M) = \det(AD - BC)$.

(b) Seien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in \mathbb{R}^3$ und $\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{3} x_j y_j$. Zeigen Sie
(a) die *Jacobi-Identität* $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$,
(b) sowie die *Lagrange-Identität* $\left\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \times \vec{d} \right\rangle = \langle \vec{a}, \vec{c}\rangle\langle \vec{b}, \vec{d}\rangle - \langle \vec{b}, \vec{c}\rangle\langle \vec{a}, \vec{d}\rangle$.

Aufgabe 3: (12 + 8 = 20 Punkte)

(a) Es sei γ eine positiv orientierte Parametrisierung des Bogens, welcher durch Schneiden des Zylinders $Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$ mit der Ebene $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$ entstehen. Bestimmen Sie das Kurvenintegral

$$\int_\gamma (-y^3, x^3, -z^3) \cdot \mathrm{d}s\,.$$

(b) Berechnen Sie die folgende Integral

$$\int_A xyz \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ 0 \le z \le 1,\ x^2 + y^2 \le 1\right\}.$$

— **Bitte wenden!** —

Aufgabe 4: (8 + 12 = 20 Punkte)

(a) Bestimmen Sie alle Stellen lokaler Extrema der jeweiliger Funktion und entscheiden Sie, ob es sich dabei um Maxima oder Minima handelt.

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ g(x,y) = 2x^3 - 3xy + 2y^3 - 3 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

(b) Betrachten Sie die Gleichungen

$$x^2 + y^2 - u^2 + v^2 = 0 \qquad \text{und} \qquad x^2 + 2y^2 - 3u^2 + 4v^2 = 1$$

mit $(x,y,u,v) \in \mathbb{R}^4$. Zeigen Sie, dass durch diese Gleichungen auf einer offenen Menge $(0,0) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$ zwei Funktionen $u, v \in C^1(U)$ mit $u(0,0) = v(0,0) = 1$ implizit definiert werden.

Berechnen Sie $u'(0,0)$, sowie $v'(0,0)$.

Viel Erfolg!

Hinweise für nach der Klausur:
Die **Ergebnisse** der Modulprüfung werden am Dienstag, den **24.04.2019**, neben Zimmer 2.027 (Geb. 20.30) veröffentlicht.
Die **Einsichtnahme** in die korrigierten Modulprüfungen findet am Donnerstag, den **25.04.2019**, von **16 bis 18 Uhr** in der **Messtechnik-Hörsaal (Geb. 30.33)** statt.
Die mündlichen Nachprüfungen finden in der Woche von 29.04. bis 03.05. statt.