1)

a) $(T\vec{x}, \vec{z}) = (\vec{x} \times \vec{y}, \vec{z}) = \det(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = -\det(\vec{z}, \vec{y}, \vec{x}) = -(\vec{z} \times \vec{y}, \vec{x}) = (\vec{x}, -T\vec{z})$

$= (\vec{x}, T^{*}\vec{z})$

$T^{*} = -T$

c) $0 = T\vec{x} = \vec{x} \times \vec{y} \Leftrightarrow \vec{x}, \vec{y}$ lin abhängig

$\Rightarrow \operatorname{Kern}(T) = \operatorname{lin}(\vec{y})$

d) $\operatorname{Bild} T = \operatorname{Kern}(T^{*})^{\perp}$

$\Rightarrow \operatorname{Bild} T = \operatorname{Kern}(T^{*})^{\perp} = (\operatorname{Kern} T)^{\perp} = \operatorname{lin}(\vec{y})^{\perp} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : (\vec{x}, \vec{y}) = 0\}$

b) $|T - \lambda| = \left| \begin{pmatrix} 0 & -y_3 & y_2 \\ y_3 & 0 & -y_1 \\ -y_2 & y_1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -\lambda & -y_3 & y_2 \\ y_3 & -\lambda & -y_1 \\ -y_2 & y_1 & -\lambda \end{pmatrix} \right| = -\lambda^3 - \lambda(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)$

$= -\lambda(\lambda^2 + \|y\|^2) \Rightarrow \lambda_1 = 0$

$\lambda_{2,3} = \pm i \|y\|$ ← kein Eigenwert weil $\mathbb{R}^3$ ist Vektorraum mit reele Körper

Eigenwerte von $(T) = \{0\}$

2)

a) a)

$$L=\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ -D^{-1}C & I_q \end{pmatrix}$$

$$ML=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ -D^{-1}C & I_q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A-BD^{-1}C & B \\ 0 & D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_p & BD^{-1} \\ 0 & I_q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A-BD^{-1}C & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

$$\det ML=\det M \det L=\det I_p \det I_q \det M=\det(A-BD^{-1}C)\det D$$

$$\det M=\det D\det(A-BD^{-1}C)$$

a) b) $\det(A-BD^{-1}C)=\det A-\det(BD^{-1}C)\underset{\uparrow}{=}\det A-\det(BCD^{-1})=\det A-\det BC\det D^{-1}$

$CD=DC \Rightarrow D^{-1}C=CD^{-1}$

$$\det M=\det D(\det A-\det BC\det D^{-1})=\det AD-\underbrace{\det D\det D^{-1}}_{1}\det BC=\det AD-BC$$

b) a)

$$\vec a\times(\vec b\times\vec c)=\vec b\langle\vec a,\vec c\rangle-\vec c\langle\vec a,\vec b\rangle$$

$$\vec a\times(\vec b\times\vec c)+\vec b\times(\vec c\times\vec a)+\vec c\times(\vec a\times\vec b)=\vec b\langle\vec a,\vec c\rangle-\vec c\langle\vec a,\vec b\rangle+\vec c\langle\vec b,\vec a\rangle-\vec a\langle\vec b,\vec c\rangle+$$
$$+\vec a\langle\vec c,\vec b\rangle-\vec b\langle\vec c,\vec a\rangle=0$$

b) b) $\langle\vec a\times\vec b,\vec c\times\vec d\rangle=\det(\vec a,\vec b,\vec c\times\vec d)=\det(\vec b,\vec c\times\vec d,\vec a)=\langle\vec b\times(\vec c\times\vec d),\vec a\rangle$

$$\vec b\times(\vec c\times\vec d)=\vec c\langle\vec b,\vec d\rangle-\vec d\langle\vec b,\vec c\rangle$$

$$\langle\vec b\times(\vec c\times\vec d),\vec a\rangle=\langle\vec c,\vec a\rangle\langle\vec b,\vec d\rangle-\langle\vec d,\vec a\rangle\langle\vec b,\vec c\rangle=\langle\vec a,\vec c\rangle\langle\vec b,\vec d\rangle-\langle\vec a,\vec d\rangle\langle\vec b,\vec c\rangle$$

3) a) $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$

$$\gamma = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 1-\cos\varphi-\sin\varphi \end{pmatrix} \in \partial Z$$

$$\gamma' = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ \sin\varphi - \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$\int_\gamma (-y^3, x^3, -z^3) \cdot ds = \int_0^{2\pi} \sin^4\varphi + \cos^4\varphi - (\sin\varphi - \cos\varphi)(1-\cos\varphi-\sin\varphi)^3 \, d\varphi = (*)$$

$$\int_0^{2\pi} \underbrace{(\sin\varphi - \cos\varphi)}_{f'} \underbrace{(1-\cos\varphi-\sin\varphi)^3}_{f^3} d\varphi = \left[\tfrac{1}{4}(1-\cos\varphi-\sin\varphi)^4\right]_0^{2\pi} = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^4\varphi + \cos^4\varphi \, d\varphi = 2\int_0^{2\pi} \sin^4\varphi \, d\varphi = 2\int_0^{2\pi} \left(\frac{1-\cos 2\varphi}{2}\right)^2 d\varphi = 2\int_0^{2\pi} \frac{1}{4} - \cos 2\varphi + \frac{(\cos 2\varphi)^2}{4} \, d\varphi =$$

$$= 2\int_0^{2\pi} \frac{1}{4} - \cos 2\varphi + \frac{1+\cos 4\varphi}{8} \, d\varphi = 2\left[\frac{3}{8}x - \frac{\sin 2\varphi}{2} + \frac{\sin 4\varphi}{32}\right]_0^{2\pi} = \frac{3}{2}\pi$$

$$(*) = \frac{3}{2}\pi$$

b) $$\int_A xyz \, dx\,dy\,dz = \begin{bmatrix} x = r\sin\varphi \\ y = r\cos\varphi \\ z = h \end{bmatrix} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 h \sin\varphi\cos\varphi \, dr\,d\varphi\,dh = \int_0^1 r^3 dr \int_0^1 h\,dh \int_0^{2\pi} \cos\varphi\sin\varphi \, d\varphi$$

$$= \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 \left[\frac{h^2}{2}\right]_0^1 \left[\frac{\sin^2\varphi}{2}\right]_0^{2\pi} = 0$$

4)

a)

$$\nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} 6x^2 - 3y \\ -3x + 6y^2 \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \begin{matrix} x^2 = y\frac{1}{2} \\ x = 2y^2 \end{matrix} \Rightarrow x_1 = y_1 = 0 \;,\; x_2 = y_2 = \frac{1}{2}$$

$$g''(x,y) = \begin{pmatrix} 12x & -3 \\ -3 & 12y \end{pmatrix}$$

$$g''(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \leftarrow \text{positiv definit} \Rightarrow (\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) \text{ Minimum}$$

$$g''(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$ ← diese Matrix nicht positiv oder negativ definit $\Rightarrow (0,0)$ kein Maximum oder Minimum

b) $G: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$

$$G(x,y,u,v) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - u^2 + v^2 \\ x^2 + 2y^2 - 3u^2 + 4v^2 - 1 \end{pmatrix}$$

lösen: $G(x,y,u,v) = 0$ neben $(x,y,u,v) - (0,0,1,1)$

$$G(0,0,1,1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$G'(x,y,u,v) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & -2u & 2v \\ 2x & 4y & -6u & 8v \end{pmatrix}$$

invertieren $\frac{\partial G}{\partial(u,v)}(0,0,1,1)$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -2 & 2 & 1 & 0 \\ -6 & 8 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

von Satz über implizit definierte Funktionen $\exists (0,0) \in U \subseteq \mathbb{R}^2, (1,1) \in V \subseteq \mathbb{R}^2 : \varphi \in C^1(U,V)$

$$G(x,y,u,v) = 0 \Leftrightarrow (u,v) = (\varphi_1(x,y), \varphi_2(x,y))$$

$$\varphi'(x,y) = -\left(\frac{\partial G}{\partial(u,v)}(x,y,\varphi(x,y))\right)^{-1} \frac{\partial G}{\partial(x,y)}(\varphi_1(x,y), \varphi_2(x,y))$$

$$\varphi'(0,0) = -\begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$u'(0,0) = (0,0) = v'(0,0)$$