Aufgabe 1

a) $f(z)$ hat in 0 und $-i$ jeweils Polstellen erster Ordnung. $|i-0|=1$, $|i-(-i)|=2 \rightarrow$ Reihenentwicklungen um $z_0=i$ sind möglich in $\underline{G_1=\{z \mid |z-i|<1\}}$, $\underline{G_2=\{z \mid 1<|z-i|<2\}}$, $\underline{G_3=\{z \mid 2<|z-i|\}}$.

b) Da $-\frac{i}{2}$ in G_2 liegt, ist hier die Laurentreihe von $f(z)$ um $z_0=i$ gesucht, deren Konvergenzbereich G_2 ist.

Partialbruchzerlegung: $\dfrac{5z+2i}{z(z+i)}=\dfrac{2}{z}+\dfrac{3}{z+i}$

Entwicklung um i (geom Reihe)

$$\overset{\downarrow}{=}\frac{2}{i+z-i}+\frac{3}{2i+z-i}$$

$$=\frac{1}{z-i}\,\frac{2}{1+\frac{i}{z-i}}+\frac{3}{2i}\,\frac{1}{1+\frac{z-i}{2i}}$$

$$=\underbrace{\underbrace{2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k i^k (z-i)^{-k-1}}_{\text{konvergent für } |z-i|>1}+\underbrace{3\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2i)^{k+1}}(z-i)^k}_{\text{für } |z-i|<2}}_{\text{konvergent in } G_2\text{, also in } -\frac{i}{2}.}$$

c) 0 und $-i$ sind Polstellen 1. Ordnung

also: $\underline{\operatorname{Res}(f(z),0)}=\dfrac{5z+2i}{z+i}\Big|_{z=0}\underline{=2}$

$\underline{\operatorname{Res}(f(z),-i)}=\dfrac{5z+2i}{z}\Big|_{z=-i}\underline{=3}$

Aufgabe 2

a) Wegen $\int_0^\infty \frac{x^2}{1+x^6}dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^6}dx}_{\checkmark \text{ (Integrand stetig)}} + \int_1^\infty \frac{x^2}{1+x^6}dx$

$\int_1^\infty \frac{x^2}{1+x^6}dx$ existiert nach dem Majorantenkriterium, da $\int_1^\infty \frac{1}{x^4}dx = \frac{1}{3}$ existiert, wegen $0 < \frac{x^2}{1+x^6} < \frac{1}{x^4}$ für $x \geq 1$.

b) $I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^6}dx$. Bei $\frac{x^2}{1+x^6}$ liegt keine Singularität auf der reellen Achse, der Nennergrad ist um mehr als 2 größer als der Zählergrad und $f(z) = \frac{z^2}{1+z^6}$ hat in $\{\operatorname{Im} z > 0\}$ nur endlich viele Polstellen. Nach Vorlesung gilt

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^6}dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{3} \operatorname{Res}\left(\frac{z^2}{1+z^6}, z_j\right)$, wobei z_j die Nullstellen $z_j = e^{\frac{\pi i}{6}} e^{\frac{\pi i}{3}(j-1)}$ $(j=1,\dots,6)$ von $1+z^6$ sind.

z_1, z_2, z_3 liegen in der oberen Halbebene.

Da $z_j^2 \neq 0$ und die z_j einfache Polstellen sind, folgt:

$\operatorname{Res}\left(\frac{z^2}{1+z^6}, z_j\right) = \frac{1}{6z_j^3} \rightarrow \operatorname{Res}(\dots, z_1) = -\frac{i}{6}$,

$\operatorname{Res}(\dots, z_2) = \frac{i}{6}$, $\operatorname{Res}(\dots, z_3) = -\frac{i}{6}$

$\rightarrow \underline{I} = \frac{1}{2} 2\pi i \left(2\left(-\frac{i}{6}\right) + \frac{i}{6}\right) \underline{= \frac{\pi}{6}}$

Aufgabe 3

Für $\underline{p = p(t)}$ mit $\underline{y' = p(y)}$ (y Lösung) erhält man

$$\underline{2p\dot{p} = e^{2t} + p^2} \text{ und mit } \underline{v = p^2} \text{ bedeutet das:}$$

$$\underline{\dot{v} - v = e^{2t}} \quad \text{(linear, inhomogen, 1. Ordnung)}$$

$$\rightarrow v(t) = p^2(t) = e^{2t} + c_1 e^t \quad (c_1 \text{ konst, beliebig})$$

$$\rightarrow \text{DGl für } y: \quad y'(x) = (e^{2y(x)} + c_1 e^{y(x)})^{\frac{1}{2}}$$

$$y(0) = 1, y'(0) = e \rightarrow e = (e^2 + c_1 e)^{\frac{1}{2}} \rightarrow c_1 = 0$$

also: $\underline{y'(x) = e^{y(x)}}$ (DGl mit getrennten Variablen)

$$\rightarrow -e^{-y(x)} = x + c_2 \xrightarrow[y(0)=1]{x=0} c_2 = -\frac{1}{e}$$

somit $e^{-y(x)} = \frac{1}{e}(1 - xe)$

$$\rightarrow \underline{y = \varphi(x) = 1 - \ln(1 - ex), \; x < \frac{1}{e}.}$$

Aufgabe 4

Schreibe die DGL in symmetrischer Form:

$$\underbrace{(\sin(x) + y^2)}_{=:f(x,y)}dx + \underbrace{(y^2+2xy-1)}_{=:g(x,y)}dy = 0 \qquad (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

Wegen $D_2 f(x,y) = 2y = D_1 g(x,y)$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

ist die DGL auf $\mathbb{R}^2$ exakt. Aus

$D_1\varphi(x,y) = \sin(x) + y^2$ (1) und $D_2\varphi(x,y) = y^2+2xy-1$ (2)

wird ein Potential $\varphi = \varphi(x,y)$ berechnet:

(1) $\varphi(x,y) = -\cos(x) + y^2x + h(y) \rightarrow D_2\varphi(x,y) = 2xy + h'(y)$

$\overset{(2)}{\Rightarrow} h'(y) = y^2-1 \rightarrow h(y) = \frac{1}{3}y^3 - y$

also: $\varphi(x,y) = y^2x - \cos(x) + \frac{1}{3}y^3 - y$, so dass

die allgemeine Lösung in impliziter Form durch

$$y^2x - \cos(x) + \frac{1}{3}y^3 - y = c$$

mit beliebigen Konstanten c gegeben wird.

Die Lösung durch $(\frac{\pi}{2}, 1)$ wird durch

$$c = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3} - 1 = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}$$ festgelegt.