HM III Vorlesungszusammenfassung WS 08/09

24. Kapitel Grundlagen der Funktionentheorie

24.1 1) Der $\mathbb{R}^2$ wird mit $\mathbb{C}$ identifiziert mittels der Zuordnung $\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \longleftrightarrow z = x+iy \in \mathbb{C}$

($x = \mathrm{Re}(z)$, $y = \mathrm{Im}(z)$)

Sind $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ so bedeutet hiermit der Ausdruck $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\binom{x}{y}$ im $\mathbb{R}^2$ das Produkt $(a+ib)(x+iy)$ im $\mathbb{C}$

2) Erinnerung an die Def von $\exp(z) (= e^z)$, $\cos(z)$, $\sin(z)$ mittels Potenzreihen (HM I), insbesondere an:

$|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)}$, $|e^{iy}| = 1$ $(y \in \mathbb{R})$, $\cos(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$ $(z \in \mathbb{C})$,

$\sin(z) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$ $(z \in \mathbb{C})$, $e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z)$ $(z \in \mathbb{C})$,

$e^z = e^w \Longleftrightarrow z = w + 2k\pi i$ $(k \in \mathbb{Z})$, $e^{2k\pi i} = 1$ $(k \in \mathbb{Z})$.

3) Das Argument von $z \in \mathbb{C}, z \neq 0$:

$\arg(z) = \{\varphi \in \mathbb{R} \mid \frac{z}{|z|} = e^{i\varphi}\}$: gehört φ_0 zu $\arg(z)$, so gilt $\varphi \in \arg(z) \Longleftrightarrow \varphi - \varphi_0 = 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Die Zuordnung $z \neq 0 \longrightarrow \arg(z)$ wird eindeutig, wenn der Wertebereich auf ein Intervall der Länge 2π beschränkt wird. Wir werden unter dem Argument von z meistens eine der beiden Funktionen verstehen:

(1) $\varphi = \mathrm{Arg}(z)$ $(z \neq 0) \Longleftrightarrow -\pi < \varphi \leq \pi$ und $\frac{z}{|z|} = e^{i\varphi}$

oder

(2) $\varphi = \mathrm{Arg}(z)$ $(z \neq 0) \Longleftrightarrow 0 \leq \varphi < 2\pi$ und $\frac{z}{|z|} = e^{i\varphi}$

Beispiel:

$\mathrm{Arg}(i)$ ist bei beiden Funktionen $\frac{\pi}{2}$.

$\mathrm{Arg}(-i) = -\frac{\pi}{2}$ im Fall (1), $\mathrm{Arg}(-i) = \frac{3\pi}{2}$ im Fall (2).

24.2 Stetigkeit

Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f: G \to \mathbb{C}$, $z \to w = f(z)$ eine Funktion. Es ist $f = u + iv$ mit
$u(x,y) := \mathrm{Re}(f(x+iy))$, $v(x,y) := \mathrm{Im}(f(x+iy))$ $\quad (x,y) \in G$
Wir ordnen demgemäß f das reelle Vektorfeld
$$\vec{f}: G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \;:\; \vec{f}(x,y) := \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}, \; (x,y) \in G,$$
zu.

<u>Beispiele</u>: 1) Zu $w = f(z) = z^2$ gehört $\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$

2) Zu $w = f(z) = \sin(z)$ gehört $\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} \sin(x)\cosh(y) \\ \cos(x)\sinh(y) \end{pmatrix}$.

<u>Def</u>: f ist in $z_0 \in G$ $(z_0 = x_0 + iy_0)$ <u>stetig</u>
$\Longleftrightarrow$ $\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\, f(x+iy) \\ \mathrm{Im}\, f(x+iy) \end{pmatrix}$ ist in (x_0, y_0) stetig (HM II)

$$\left(\Longleftrightarrow \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in G}} f(z) = f(z_0) \right)$$

<u>Beispiele</u> 1) $f(z) = z^2$ und $f(z) = \sin(z)$ sind in jedem $z \in \mathbb{C}$ stetig.

2) $f(z) = \begin{cases} \frac{z}{\bar{z}} & , z \neq 0 \\ a & , z = 0 \end{cases}$ $\quad (a \in \mathbb{C})$ ist

nicht stetig in $z = 0$. f lässt sich auch nicht so in $z = 0$ abändern, dass f in $z = 0$ stetig wird.

24.3 Differenzieren im Komplexen

1) $f: G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt in $z_0 \in G$ <u>komplex diff'bar</u>,
<u>(1)</u> falls $\displaystyle\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ existiert. Dieser Grenzwert heißt die <u>1. Ableitung von f in z_0</u> und wird <u>$f'(z_0)$</u> bezeichnet.

<u>Satz 1</u> (Umformulierung dieser Definition)

$f: G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist in $z_0 \in G$ komplex diff'bar

$\Longleftrightarrow$ es gibt ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit

(2) $f(z) = f(z_0) + \lambda(z - z_0) + r(z)$, $z \in G$,

wobei $r: G \to \mathbb{C}$ eine Funktion ist, die $\lim\limits_{z \to z_0} \frac{r(z)}{z - z_0} = 0$ erfüllt. Ist f in z_0 diff'bar, so gilt $\lambda = f'(z_0)$.

<u>Bemerkungen</u> <u>1.</u> Ist f in z_0 diff'bar, so ist f in z_0 stetig.

<u>2.</u> Die Ableitungsregeln aus dem (eindim.) Reellen gelten wörtlich hier ebenfalls, da auch in HM I (1) der Ausgangspunkt ist. Es gelten also <u>z.B.</u> die Produkt-, Quotienten-, Kettenregel, das Differenzieren von Potenzreihen geht gliedweise.

2) $f: G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $w = f(z) = u + iv$, heißt in $z_0 = x_0 + iy_0$ <u>reell diff'bar</u>, falls das Vektorfeld $\vec{f}: G \to \mathbb{R}^2$, $\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$, in G diff'bar ist.

3) Schreibt man mit HM II auf, was die Diff'barkeit von $\vec{f}$ bedeutet und verknüpft das mit <u>(2)</u>, <u>Satz 1</u> oben und mit <u>24.1</u>, 1), so erhält man

<u>Satz 2</u>: Es seien ein Gebiet $G \subset \mathbb{C} (= \mathbb{R}^2)$ und Funktionen $u, v: G \to \mathbb{R}$ gegeben. Setzt man $f = u + iv$, so ist $f: G \to \mathbb{C}$ genau dann holomorph, wenn u und v in G diff'bar sind und in G die Cauchy-Riemannschen DGln erfüllen.

f heißt *in G holomorph*, wenn f in der Umgebung jeden Punktes aus G komplex differenzierbar ist.
Die *Cauchy-Riemannschen DGln* für u und v lauten:

$$\text{(CR-DGln)} \qquad D_1 u(x,y) = D_2 v(x,y), \; D_2 u(x,y) = -D_1 v(x,y) \quad (x,y \in G).$$

4) *Bemerkungen:* ① Für eine holomorphe Funktion $f = u + iv$ gelten:

$$f'(x+iy) = (D_1 u + i D_1 v)(x,y)$$
$$= D_1 u - i D_2 u = D_2 v + i D_1 v = D_2 v - i D_2 u$$
$$|f'(x+iy)|^2 = \det \vec{f}'(x,y)$$

② 1) Gegeben sind $f = u + iv$ und $\vec{f} = \binom{u}{v} : G \subset \mathbb{C} (= \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}^2$ aus $C^1(G)$ mit $\nabla \cdot \vec{f}(x,y) = 0$ und $\nabla \times \vec{f}(x,y) = \vec{0}$ für $(x,y) \in G$.
Dann ist $g = u - iv$ in G holomorph.

2) Ist $\vec{f} = \binom{u}{v} \in C^1(G)$ und ist G ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Dann hat man:
$g = u - iv$ ist in G holomorph $\longleftrightarrow$ es gibt eine $C^2(G)$-Funktion φ mit $\vec{f} = \nabla\varphi$ in G und $\Delta\varphi = 0$ in G.

③ Ist $f = u + iv$ in G holomorph, so gilt
$$\nabla u(x,y) \cdot \nabla v(x,y) = 0, \quad (x,y) \in G.$$

24.4 Holomorphe und harmonische Funktionen

Satz 1 Ist $w = f(z)$ mit $u = \mathrm{Re}(f)$, $v = \mathrm{Im}(f)$ in G holomorph, so sind u und v in G harmonisch:
$$\Delta u(x,y) = \Delta v(x,y) = 0, \quad (x,y) \in G.$$