7. Beispiel:

$y' = 2\cdot 10^6 x y^2,\ y(0)=1$ hat die

Lösung $\quad y = \varphi(x) = \dfrac{1}{1-10^6 x^2}$, die lediglich

für $|x| < 10^{-3}$ definiert ist, obwohl $f(x,y) = 2\cdot 10^6 x y^2$ beliebig oft diff'bar ist.

25.2 Implizite DGln

1. $\quad F(x,y,y') = 0 \qquad \boxed{(*)}$

$F = F(x,y,p)$ ist gegebene $C^1(G)$-Funktion, wobei $G \subset \mathbb{R}^3_{(x,y,p)}$ ein Gebiet ist. Es sei $D_3F(x,y,p) \neq 0$ für $(x,y,p) \in G$.

Es ist $\varphi \in C^1(I)$ mit $F(x,\varphi(x),\varphi'(x)) = 0,\ x \in I$, gesucht.

Satz 1 1) Gibt es Konstanten a, b derart, dass für alle $x \in I$ $\quad F(x, ax+b, a) = 0$ gilt, so sind $y = \varphi(x) = ax+b$ Lösungen von $\boxed{(*)}$.

2) Gibt es C^1-Funktionen ψ, χ mit

$$\begin{cases} F(\psi(t), \chi(t), t) = 0 \\ \dot\chi(t) = t\,\dot\psi(t) \end{cases} \qquad (t \in J)$$

so ist $x = \psi(t),\ y = \chi(t)\ \ (t \in J)$ die Parameterdarstellung einer Lösung von (1), die keine Gerade ist.

Beispiele

1) $y = xy' + g(y')$ hat für beliebige a aus dem Definitionsbereich von g die Geraden $y = \varphi(x) = ax + g(a)$ als Lösung.

2) $y = y' + y'^2$ hat als Gerade nur die Lösung $y = \varphi(x) = 0 \quad \forall x$.

3) Die d'Alembert Gleichung $y = xf(y') + g(y')$ hat für alle Zahlen a, die $a = f(a)$ erfüllen, die Geraden $y = \varphi(x) = ax + g(a)$ als Lösungen.

4) $y = xy'^2 + y'$ hat die Geraden $y = \varphi(x) = 0 \quad \forall x$ und $y = \varphi(x) = x + 1$ als Lösungen. Lösungen, die keine Geraden sind, haben die Parameterdarstellung

$$x = \psi(t) = (t-1)^{-2}\ln|t| - (t-1)^{-2}t + c(t-1)^{-2} \qquad \begin{pmatrix} 0 < t < 1 \\ \text{oder} \\ t > 1 \end{pmatrix}$$
$$y = \chi(t) = t^2\psi(t) + t$$

---

2. $\underline{\Phi(y, y', y'') = 0}$ (Die Variable x tritt nicht explizit auf!)
$\boxed{(**)}$

Satz 2. 1) Berechne $p = p(t)$ aus $\Phi(t, p(t), \dot{p}(t)p(t)) = 0$.

2) Lösungen $y = \varphi(x)$ von $(**)$ sind Lösungen der Gleichung $y' = p(y)$.

Beispiel: $y'' = yy' + y'^2$, $y(1) = 0$, $y'(1) = -1$ hat die Lösung $y = \varphi(x) = -1 + e^{1-x}$.