25.3 Exakte DGln und integrierender Faktor

1) Erinnerungen an HM II

1. Kettenregel: $H = H(x,y)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$; $\vec{r} = \vec{r}(t) \in \mathbb{R}^2$, $t \in J \subset \mathbb{R}$

$$h(t) := (H \circ \vec{r})(t) = H(\vec{r}(t)) = H(x(t), y(t)):$$
$$h'(t) = \nabla H(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)$$

2. Ist $G \subset \mathbb{R}^2$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $\vec{v}: G \to \mathbb{R}^2$ ein C^1-Vektorfeld, so gilt:
$\vec{v}$ ist in G ein Potentialfeld

$$\Longleftrightarrow$$

$$D_1 v_2(x,y) = D_2 v_1(x,y), \quad (x,y) \in G.$$

2) Exakte DGln

$G \subset \mathbb{R}^2$ sei ein einfach zusammenhängendes Gebiet. $f, g \in C^1(G)$ seien gegebene Funktionen und $\vec{v}(x,y) := \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix}$ das hiermit gebildete C^1-Vektorfeld.

Wir betrachten DGln der folgenden Form:

(1) $\quad f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy = 0$

und meinen hiermit im Fall, dass eine Lösung $y = \varphi(x)$ gesucht wird: $\quad f(x,y) + g(x,y)\,y' = 0 \quad$ (1.1)

im Fall, dass eine Lösung $x = h(y)$ gesucht wird:

$$f(x,y)\,x' + g(x,y) = 0 \quad (1.2)$$

im Fall, dass eine Lösung $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ gesucht wird: $\quad f(x,y)\,x' + g(x,y)\,y' = 0 \quad$ (1.3)

(1.1), (1.2) sind Spezialfälle von (1.3).

$\vec{r} = \vec{r}(t) \in C^1(I)$, I Intervall, ist Lösung von (1), falls gilt $\underline{\vec{v}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t) = 0, \; t \in I.}$ (2)

Def: Die DGl heißt exakt in G, falls $\vec{v}$ in G ein Potentialfeld ist, falls also (1), 2.)

$$D_2 f(x,y) = D_1 g(x,y), \; (x,y) \in G, \text{ gilt.}$$

Berücksichtigen wir (2) und 1), 1.), so erhalten wir:

Satz 1 Es sei (1) in G exakt und φ ein Potential für $\vec{v}$ in G, so sind alle Lösungen von (1) implizit durch $\varphi(x,y) = c$ (onst) (c beliebig, konst) gegeben.
(Die Höhenlinien von φ sind die Lösungen von (1)).

Zusammenfassung):
Zur Lösung von (1) überprüfe auf Exaktheit:
$$D_2 f(x,y) \overset{?}{=} D_1 g(x,y).$$

Ist die DGl exakt, berechne $\varphi = \varphi(x,y)$ mit $\nabla\varphi = \vec{v}$.
Die Lösungen sind dann durch $\varphi(x,y) = c$ (c konst) gegeben.

Beispiele: 1) $y' = p(x)q(y)$ (getrennte Variable)

2) $$\frac{y}{x^2+y^2}\,dx - \left(1 + \frac{x}{x^2+y^2}\right)dy = 0$$