3) Integrierender Faktor (Eulerscher Multiplikator)

Es sei (1) $f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy = 0 \;,\; (x,y)\in G$

in G nicht exakt.

Def: Eine Funktion $\mu = \mu(x,y)$ ($\neq 0$ in G, $\in C^1(G)$) heißt integrierender Faktor für (1), falls (die zu (1) äquivalente DGL)

$$(2)\quad (\mu f)\,dx + (\mu g)\,dy = 0 \quad \text{in } G \text{ exakt ist}$$

Die Exaktheit von (2) beinhaltet die folgende Bedingung für $\mu = \mu(x,y)$:

$$(3)\quad (D_2\mu) f - (D_1\mu) g = \mu (D_1 g - D_2 f)$$

Zur Lösung dieser Gleichung machen wir den folgenden Ansatz: Es sei $\psi = \psi(x,y) \in C^1(G)$ gegeben: etwa $\psi(x,y) = x$, $= y$, $= x^2+y^2$, $= x+y$, $x-y$, xy, $\frac{x}{y}$, ... Berechne $H = H(t)$ so, dass

(4) $\mu(x,y) := H(\psi(x,y))$, $(x,y)\in G$, integrierender Faktor für (1) wird, also (3) löst. (3) wird mit (4) zu:

$$(5)\quad H'(\psi(x,y)) = H(\psi(x,y))\,\tilde{w}(x,y) \quad \text{mit}$$

$$\tilde{w}(x,y) = \frac{D_1 g(x,y) - D_2 f(x,y)}{f(x,y)D_2\psi(x,y) - g(x,y)D_1\psi(x,y)}$$

. Der Ansatz (4) hat etwas gebracht, falls $\tilde{w}(x) = w(\psi(x,y))$ gilt, denn dann wird (5) zu

$H'(\psi(x,y)) = H(\psi(x,y))\, w(\psi(x,y))$ mit der Lösung

$$H(\psi(x,y)) \; (= \mu(x,y)) = \exp\left(\int_{x_0}^{\psi(x,y)} w(\tau)\,d\tau\right),$$

<u>Beispiele</u>: 1) $y' + p(x)y + q(x) = 0$ (HM I / S. 78 / 79)

$$\mu(x,y) = \exp\left(\int_{x_0}^{x} p(t)\,dt\right)$$

2) $y - (x^2+y^2+x)y' = 0$ hat mit

$\psi(x,y) = x^2+y^2$ einen integrierenden Faktor

$\mu(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$. Die zugehörige exakte

DGl ist die DGl aus Bspl 2) / S. 27 unten.

<u>25.4</u> Lineare DGln 2. Ordnung. (vgl. HM I, vorletzte und letzte Woche)

<u>1.</u> <u>Problemformulierung</u>

Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $x_0 \in I$.
Mit $p, q, f : I \to \mathbb{R}$, gegebene stetige, beschränkte Funktionen wird

<u>(1)</u> $(Ly)(x) := y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x)$

gebildet und das folgende Problem gestellt:

$$\begin{cases} \text{Gesucht ist } y \in C^2(I) \text{ mit } (Ly)(x) = f(x),\ x \in I, \\ \text{und } y(x_0) = \alpha,\ y'(x_0) = \beta \quad (\text{wobei } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ vorgegebene Zahlen sind}) \end{cases}$$

Dieses Problem bezeichnen wir durch $A(f;\alpha,\beta)$.
$y \in A(f;\alpha,\beta)$ soll im folgenden eine Kurzform dafür sein, dass y das Problem $A(f;\alpha,\beta)$ löst.

<u>Satz 1</u>: Unter den oben formulierten Voraussetzungen besitzt das Problem $A(f; \alpha, \beta)$ für jedes Tripel von Daten $\{f, \alpha, \beta\}$ genau eine Lösung.

<u>Folgerung</u>: $\quad y \in A(0; 0, 0) \Longleftrightarrow y = 0$

<u>Satz 2</u> (Linearität der Problemstellung / <u>Superpositionsprinzip</u>)
Aus $y_j \in A(f_j; \alpha_j, \beta_j) \quad (j = 1, 2, \ldots, k)$

folgt für beliebige Zahlen $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$

$$\sum_{j=1}^{k} c_j y_j \in A\left(\sum_{j=1}^{k} c_j f_j ; \sum_{j=1}^{k} c_j \alpha_j , \sum_{j=1}^{k} c_j \beta_j\right)$$

---

b. <u>Struktur der Lösungen von $A(f; \sim, \sim)$</u>

Mit der Bezeichnung (siehe auch HM I)

$$\mathcal{L}_f = \{y \mid Ly = f \text{ auf } I\} \quad (= \text{allgemeine Lösung der Gleichung } Ly = f)$$

gilt: <u>Satz 3</u>: Es sei $y_p \in \mathcal{L}_f$ gegeben. Dann gilt

$$\mathcal{L}_f = y_p + \mathcal{L}_0 := \{y \mid y = y_p + y_0, \ y_0 \in \mathcal{L}_0\}$$

ausführlich besagt dies:

> Alle Lösungen von $Ly = f$ erhält man, indem man zu allen Lösungen der homogenen Gleichung $Ly = 0$ eine Lösung y_p der inhomogenen Gleichung addiert.