## 3. Beschreibung von $\mathcal{L}_0$

**Satz 4**: Eine Basis des Vektorraumes $\mathcal{L}_0$ ist gegeben durch $y_{e_1} \in A(0;1,0)$ und $y_{e_2} \in A(0;0,1)$.

(Eine Basis von $\mathcal{L}_0$ heißt auch Fundamentalsystem von $L$)

**Bemerkung**: Die Lösung des Problems $A(0;\alpha,\beta)$ ist $y = \alpha y_{e_1} + \beta y_{e_2}$.

---

## 4. Zur Lösung von $A(f;\alpha,\beta)$

$\mathcal{L}_0$ bezieht sich auf $L$ ((1), 2.5.4, 1. (S. 29)).

**Satz 5**: Es sei $u \in \mathcal{L}_0$, $u \neq 0$. Es gilt:
Ist $v$ die allgemeine Lösung von

$$(1) \qquad v''(x) + v'(x)\left(2\frac{u'(x)}{u(x)} + p(x)\right) = \frac{f(x)}{u(x)},$$

so ist $y := uv$ die allgemeine Lösung von $Ly = f$.

Mit $m(x) = \frac{u^2(x)}{u^2(x_0)} \exp\left(\int_{x_0}^{x} p(t)\,dt\right)$, dem integrierenden Faktor von (1), erhält man

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} y(x) = {} & v(x_0)\,u(x) && (=: y_1) \\ & + v'(x_0)\,u(x) \int_{x_0}^{x} \frac{ds}{m(s)} && (=: y_2) \\ & + u(x) \int_{x_0}^{x} \left[ \int_{x_0}^{s} \frac{f(t)}{u(t)}\, m(t)\,dt \right] \frac{ds}{m(s)} && (=: y_3) \end{aligned} \right.$$

Es gelten:

$$\left.\begin{array}{l} y_1 \in A(0;\, v(x_0)u(x_0),\, v(x_0)u'(x_0)) \\ y_2 \in A(0;\, 0,\, v'(x_0)u(x_0)) \end{array}\right\} y_1+y_2 \in \mathcal{L}_0$$

$$y_3 \in A(f;\, 0,0) \qquad \text{(nachprüfen!)}$$

Konstruktion von $y_{h_1} \in A(0;1,0)$ durch Wahl von

$$v(x_0) = \frac{1}{u(x_0)} \quad \text{und} \quad v'(x_0) = -\frac{u'(x_0)}{u^2(x_0)}$$

in $y_1, y_2$. Es ist dann $y_{h_1} = y_1 + y_2$. (3)

Wählt man $v(x_0)=0$ und $v'(x_0) = \frac{1}{u(x_0)}$ und bildet hiermit $y_1+y_2$, so ergibt das $y_{h_2} \in A(0;0,1)$ (4)

Insgesamt ist jetzt die Lösung $y$ von $A(f;\alpha,\beta)$ in der Form $y = \alpha y_{h_1} + \beta y_{h_2} + y_3$ angebbar.

Ausführlich hingeschrieben lauten $y_{h_1}, y_{h_2}$:

$$y_{h_1}(x) = \frac{u(x)}{u(x_0)} - \frac{u'(x_0)}{u^2(x_0)}\, u(x) \int_{x_0}^{x} \frac{dt}{u(t)}$$

$$y_{h_2}(x) = \frac{u(x)}{u(x_0)} \int_{x_0}^{x} \frac{dt}{u(t)}.$$

Die Lösung des Problems $A(f;\alpha,\beta)$ ist also dann gelungen, wenn man <u>eine</u> nichttriviale Lösung $u$ der homogenen Gleichung $Ly=0$ gefunden hat.

Einschub. Ergänzung.

Die Funktion $W: C^1(I) \times C^1(I) \to C(I)$, die durch

$$W(u,v)(x) := \det\begin{pmatrix} u(x) & v(x) \\ u'(x) & v'(x) \end{pmatrix}, \quad x \in I,$$

definiert ist, heißt Wronski-Determinante der Funktionen $u$ und $v$.

1) Versuchen Sie, die folgenden Aussagen zu beweisen (nicht schwierig):

$\mathcal{L}_0$ sei der Lösungsraum von $Ly = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, $x \in I$.
Es seien $u, v \in \mathcal{L}_0$ gegeben.
Dann gelten:
$u, v$ sind l. u. auf $I \iff W(u,v)(x) \neq 0 \quad \forall x \in I$
$\iff W(u,v)(x_0) \neq 0$ für ein $x_0 \in I$

2) Es sei $I = [-1,+1]$. Berechnen Sie für $u, v$ mit

$$u(x) = \begin{cases} x^2, & -1 \leq x \leq 0 \\ 0, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}, \quad v(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x \leq 0 \\ x^2, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$W(u,v)(x)$ für $x \in [-1,+1]$. Sind $u, v$ auf $I$ l. a. oder l. u.? Vergleichen Sie mit den Aussagen unter 1) und erklären Sie.