## 5. Beispiele

1) $y'' - y'\cos(x) + y\sin(x) = \sin(x)$ $\quad (*)$

Der Ansatz $u(x) = h(\sin(x))$ zur Lösung der homogenen Gleichung führt auf die Gleichung
$$h''(t)(1-t^2) - h'(t)\,t - h'(t)(1-t^2) + h(t)\,t = 0$$
für $h = h(t)$. Diese Gleichung hat die Lösung $h(t) = e^t$, womit $u(x) = \exp(\sin(x))$ Lösung der homogenen Gleichung $(*)$ ist. Die allgemeine Lösung der Gleichung $(*)$ findet man jetzt gemäß 4. oben mit dem Reduktionsansatz.

Bemerkung: $(*)$ kann so geschrieben werden:

$$(y' - y\cos(x))' = \sin(x)$$

Dies ist einfach zu integrieren. Man erhält als allgemeine Lösung von $(*)$:
$$y(x) = c_1 e^{\sin(x)} + c_2 e^{\sin(x)} \int_{x_0}^{x} e^{-\sin(t)}\,dt + 1$$

mit beliebigen Konstanten $c_1, c_2$.

2) $y'' + (1-x^2)y = 0$

— Zur Übung berechne man eine Lösung wie oben durch den Ansatz $y(x) = h(x^2)$.

— Wir suchen die Lösung in Form einer Potenzreihe
$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (a_0, a_1, \dots \text{ sind gesucht})$$

Setzt man diesen Ansatz in die Dgl ein und macht Koeffizientenvergleich, so erhält man als Gleichungssystem für die $a_n$:

$$a_2 = -\frac{1}{2}a_0, \quad a_3 = -\frac{1}{3\cdot 2}a_1, \quad a_{n+2} = \frac{a_{n-2}-a_n}{(n+2)(n+1)} \quad (n=2,3,\dots)$$

Hieraus lassen sich alle $a_n$ berechnen, wenn man $a_0 = y(0)$ und $a_1 = y'(0)$ vorgibt.

Die Wahlen $a_0 = 1, a_1 = 0$ und $a_0 = 0, a_1 = 1$ liefert zwei l. u. Lösungen.

Mit $a_0 = 1, a_1 = 0$ erhält man $a_{2k+1} = 0$, $k = 0, 1, \dots$

und $a_{2k} = (-1)^k \frac{1}{2^k k!}$, $k = 0, 1, \dots$, also die Funktion

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2^k k!} x^{2k} = \exp(-\frac{x^2}{2}).$$

($a_0 = 0, a_1 = 1$ liefert eine ungerade Funktion).

## 6. Der verallgemeinerte Potenzreihenansatz. Methode von Frobenius

6.1 Es seien $p(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu x^\nu$, $q(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} q_\nu x^\nu$ gegebene Potenzreihen mit dem gemeinsamen Konvergenzbereich $|x| < R$.

Wir suchen Lösungen für $0 < x < r$ ($-r < x < 0$), $r < R$ der Gleichung

$$Ly = y'' + \frac{p(x)}{x} y' + \frac{q(x)}{x^2} y = 0 \qquad (6.1)$$

Zur Lösung machen wir für $x^2 Ly = x^2 y'' + x p(x) y' + q(x) y = 0$ (6.2)

— motiviert durch das Vorgehen bei der Eulerschen Gleichung — den Ansatz

$$y = y(x;\rho) = x^\rho \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+\rho}$$ mit zu bestimmenden

Zahlen $\rho$ und $c_k$. Dies ist der verallgemeinerte Potenzreihenansatz.