6.2 Setze den Ansatz

(6.3) $y = y(x,\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\rho)\, x^{k+\rho}$ in (6.2) ein:

Man erhält mit $f(\rho) = \rho(\rho-1)+\rho p_0+q_0$

(6.4) $x^2 Ly = x^{\rho} f(\rho) c_0 + x^{\rho} \sum_{k=1}^{\infty} \{ f(\rho+k) c_k + \sum_{m=0}^{k-1} ((m+\rho) p_{k-m} + q_{k-m}) c_m \} x^k$

Koeffizientenvgl liefert, dass $x^2 Ly = 0$ durch (6.3) erfüllt werden kann, falls

(6.5) $f(\rho) c_0 = 0$

und

(6.6) $f(\rho+k) c_k(\rho) = -\sum_{m=0}^{k-1} (p_{k-m}(m+\rho) + q_{k-m}) c_m(\rho)$, $k=1,2,\dots$

gelten.

Gilt $f(\rho+k) \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so lassen sich die $c_k(\rho)$ $(k \in \mathbb{N})$ berechnen: $c_k(\rho) = \lambda_k(\rho) c_0$, so dass y aus (6.3) nichttrivial ist, falls $c_0 \neq 0$ ist.

Gemäß (6.5) bestimmt sich ρ aus $f(\rho)=0$. Es seien ρ_1, ρ_2 die Lösungen dieser Gleichung: $f(\rho) = (\rho-\rho_1)(\rho-\rho_2)$ (6.7)

6.3 I. Der reguläre Fall $p_0 = q_0 = q_1 = 0$

bedeutet $f(\rho) = \rho(\rho-1)$, also $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 0$.

Aus (6.6) mit $c_0 = 1$ erhält man im Fall $\rho_1 = 1$:

$y_1(x) = y(x,1) = x + c_1 x^2 + c_2 x^3 + \dots$ $\quad (c_k = c_k(1))$

Im Fall $\rho_2 = 0$ ist c_1 beliebig wählbar. Mit $c_0 = 1$, $c_1 = 0$ erhält man die von y_1 l. u. Lösung

$$y_2(x) = y(x,0) = 1 + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots \qquad (c_k = c_k(0))$$

II. Ab jetzt liege $p_0^2 + q_0^2 + q_1^2 \neq 0$ vor.

1. Ist $\rho_1 \in \mathbb{C}$ (so gilt $\rho_2 = \bar{\rho}_1$). Setze $c_0 = 1$ und berechne $c_k(\rho_1)$ $(k \in \mathbb{N})$ aus (6.6). Bilde $y(x, \rho_1)$.
Dann liegt in
$$y_1(x) = \operatorname{Re} y(x,\rho_1) \text{ und}$$
$$y_2(x) = \operatorname{Im} y(x,\rho_1)$$
ein Fundamentalsystem für L vor.

2. Ab jetzt sind $\rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R}$ mit $\rho_1 \geq \rho_2$ (Nummerierung).

a) $\rho_1 > \rho_2$, $\rho_1 - \rho_2 \notin \mathbb{N}$

Mit $c_0 = 1$ sind für ρ_1 die $c_k(\rho_1)$ $(k \in \mathbb{N})$ und für ρ_2 die $c_k(\rho_2)$ $(k \in \mathbb{N})$ aus (6.6) berechenbar. Man erhält die zwei l. u. Lösungen
$$y_1(x) = y(x,\rho_1) \text{ und } y_2(x) = y(x,\rho_2).$$

b) $\rho_1 = \rho_2$ $\qquad f(\rho) = (\rho - \rho_1)^2$

Mit $c_0 = 1$ erhält man aus (6.6) die $c_k(\rho_1)$ und eine Lösung $y_1(x) = y(x,\rho_1) = x^{\rho_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\rho_1) x^k$.

Eine zweite hiervon l. u. Lösung y_2 kann man z. B. so finden:

Es sei $c_0 = 1$, und die $c_k(\rho)$ mögen (6.6) genügen.
Gemäß (6.4) gilt dann für

$$y(x,\rho) = x^\rho \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\rho) x^k \qquad (6.8)$$

$$x^2 L(y(x,\rho)) = (\rho-\rho_1)^2 x^\rho$$

$\rightarrow$ (∂_ρ = Ableitung nach ρ) : $\partial_\rho L(y(x,\rho)) = L(\partial_\rho y(x,\rho))$
$$= 2(\rho-\rho_1)x^\rho + (\ln x)x^\rho(\rho-\rho_1)^2$$

so dass $\underline{y_2(x) := \partial_\rho y(x,\rho)\big|_{\rho=\rho_1}} \overset{(6.8)}{=} \underline{(\ln x)y_1(x) + x^{\rho_1+1}\sum_{k=0}^{\infty} c'_{k+1}(\rho_1)x^k}$

eine zweite von y_1 l.u. Lösung ist.

c) $\underline{\rho_1 - \rho_2 = N \in \mathbb{N}}$

In diesem Fall bestimmt man $y_1(x) = y(x,\rho_1)$ wie vorher.

Zur Berechnung von $y_2(x)$ (mit ρ_2):

Aus (6.6) ist $c_N(\rho_2)$ wegen $f(\rho_2+N) = 0$ i.a. nicht zu berechnen
(es sei denn: $\underline{\sum_{m=0}^{N-1}(p_{N-m}(m+\rho_2) + q_{N-m})c_m = 0}$, $\overline{(*)}$.

In diesem Fall wähle $c_N(\rho_2)$ beliebig und berechne mit (6.6) alle $c_k(\rho_2)$ ($k\in\mathbb{N}$, $k \neq N$). Dies ergibt $y_2(x) = y(x,\rho_2)$ (mit etwa $c_0 = 1$), eine von y_1 l.u. Lösung). Es gelte in $\overline{(*)}$: $\neq 0$.

$c_k(\rho)$ mögen (6.6) genügen mit $c_0 = 1$.

$c_k(\rho)$ mit $k \geq N$ hat den Term $\rho - \rho_2$ im Nenner.

Setzt man $\underline{b_k(\rho) := (\rho-\rho_2)c_k(\rho)}$, so gelten

$b_k(\rho_2) = 0 \quad , \; 0 \leq k \leq N-1, \; b_N(\rho_2) \neq 0, \; b_k(\rho_2)$ ist

für $k > N$ berechenbar.

Für $\underline{\tilde{y}(x,\rho)} := (\rho-\rho_2) y(x,\rho) = \underline{x^\rho \sum_{k=0}^\infty b_k(\rho) x^k}$ gilt

$$L\tilde{y}(x,\rho) = (\rho-\rho_1)(\rho-\rho_2)^2 x^\rho$$

$\rightarrow$ (siehe oben 6)) $\underline{y_2(x) := \partial_\rho \tilde{y}(x,\rho)}\Big|_{\rho=\rho_2}$

$$\underline{= b_N(\rho_2) y_1(x) \ln x + x^{\rho_2} \sum_{k=0}^\infty b_k'(\rho_2) x^k}$$

ist eine zweite von y_1 l.u. Lösung.

<u>Bemerkung:</u> Der verallgemeinerte Potenzreihenansatz liefert also in jedem Fall mindestens eine Lösung y_1. Grundsätzlich kann dann stets eine zweite l.u. Lösung mittels Reduktion der Ordnung $y_2(x) = y_1(x) v(x)$ durch Berechnung von v bestimmt werden.

6.4 Zusammenfassender abschließender Satz (für den Fall reeller ρ_1, ρ_2)

Gegeben ist die DGl

$$(x-x_0)^2 y''(x) + (x-x_0)p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$$

mit $p(x) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j (x-x_0)^j$, $q(x) = \sum_{j=0}^{\infty} q_j (x-x_0)^j$, $|x-x_0| < R$.

Dann gibt es ein für $0 < |x-x_0| < R$ definiertes Fundamentalsystem der Form

$$y_1(x) = |x-x_0|^{\rho_1} u_1(x)$$
$$y_2(x) = A|x-x_0|^{\rho_1} u_1(x) \ln|x-x_0| + |x-x_0|^{\rho_2} u_2(x)$$

mit $u_j(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(j)} |x-x_0|^k$ $(j=1,2)$, $c_0^{(j)} = 1$.

ρ_1, ρ_2 sind die Wurzeln $(\rho_1 \geq \rho_2)$ von

$$f(\rho) = \rho(\rho-1) + \rho p_0 + q_0 = 0 .$$

Im Fall $\rho_1 = \rho_2$ ist $A = 1$.
Im Fall $\rho_1 - \rho_2 \in \mathbb{N}$ kann $A = 1$ oder $A = 0$ sein.
Im Fall $\rho_1 \neq \rho_2$, $\rho_1 - \rho_2 \notin \mathbb{N}$ ist $A = 0$

Testen Sie sich: $x^2 y'' - 2xy' + \frac{9}{4} y = 0$

$$x^2 y'' + xy' + x^2 y = 0$$

Lit (auch hinsichtlich Konvergenzfragen)

Rabenstein: Introduction to Ordinary Differential Equations
Charlton: Ordinary and Difference Equations