<u>Satz 2</u> Ist $G \subset \mathbb{R}^2$ ein einfach zshgd Gebiet und u eine harmonische Funktion, so existiert $v \in C^2(G)$ derart, dass $f := u + iv$ in G holomorph ist.

(v ist Lösung der Gleichung $\nabla v = \begin{pmatrix} -D_2 u \\ D_1 u \end{pmatrix}$ in G)

<u>Bemerkungen</u>:

(Weiter in 4) / ②, S. 4 aus Abschnitt 24.3) Es ist gegeben $\vec{f} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in C^1(G)$ mit $\nabla \cdot \vec{f}(x,y) = 0$, $\nabla \times \vec{f}(x,y) = \vec{0}$ für $(x,y) \in G$.

φ sei Potential zu $\vec{f}$: $\nabla \varphi = \vec{f}$. Es gilt $\Delta \varphi = 0$ in G, und somit gibt es nach Satz 2 vorher $\psi \in C^2(G)$ mit $\Delta \psi = 0$ in G so, dass $\Phi := \varphi + i\psi$ in G holomorph ist. <u>Φ heißt komplexes Potential</u> zu $\vec{f}$ bzw $f = u + iv$.

$\vec{f}$ hat die Richtung der Kurven $\psi(x,y) = $ const,

ψ heißt <u>Stromfunktion zu $\vec{f}$</u>. Die Kurven $\psi(x,y) = $ const sind <u>die Stromlinien von $\vec{f}$</u>.

$f = u + iv$, d.h. u, v lassen sich aus $\Phi = \varphi + i\psi$ durch $\overline{\Phi'(z)} = f(z)$ zurückgewinnen.

24.5 Umkehrfunktionen. Komplexe Logarithmen. Wurzeln

1. $G \subset \mathbb{C}$ ($\mathbb{R}^2$) ist stets ein Gebiet.
Eine Funktion $f: G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt <u>schlicht</u> in G, wenn sie in G holomorph und injektiv ist.

<u>Beispiele</u> a) $w = f(z) = z^2$ ist holomorph für alle $z \in \mathbb{C}$.
f ist auf $\{z \mid 0 < \operatorname{Arg}(z) < \frac{3\pi}{2}\}$ nicht injektiv;
auf $\{z \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$ ist $f(z) = z^2$ injektiv.

b) Es sei $f = u + iv$ in G schlicht. Es gilt dann für den Flächeninhalt $I(f(G))$ des Bildes von G:

$$I(f(G)) = \iint_G |f'(x+iy)|^2 dx\,dy.$$

<u>Beispiel</u>: (Ü) Für $f(z) = z^2 + 2z$ und $G = \{z \mid |z| < \frac{1}{2}\}$ gilt $I(f(G)) = \frac{9}{8}\pi$.

2. <u>Satz 1</u> (das ist der HM II-Satz zur inversen Funktion umformuliert für $f: G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$)

$f: G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $w = f(z)$ sei definiert und schlicht auf G. Dann ist $f(G)$ ein Gebiet, die Umkehrfunktion $g: f(G) \to G$ ist schlicht. Es gilt $g'(w) = \dfrac{1}{f'(g(w))}$, $w \in f(G)$.

(Insbesondere gilt also: Aus "f schlicht auf G" folgt: "$f'(z) \neq 0$, $z \in G$"!)

3. Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$ beliebig, fest. Weiter bezeichnen $P_\alpha := \{z \mid \alpha < \operatorname{Im}(z) < \alpha + 2\pi\}$ und für $k \in \mathbb{Z}$ $P_{\alpha,k} := \{z + 2k\pi i \mid z \in P_\alpha\}$ und $\mathbb{C}_\alpha := \mathbb{C} \setminus \{w \mid w = re^{i\alpha}, r \geq 0\}$.

<u>Satz 2</u> Für jedes $k \in \mathbb{Z}$ wird $P_{\alpha,k}$ durch die exp-Funktion schlicht auf $\mathbb{C}_\alpha$ abgebildet.

<u>Satz 3</u> Für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{Z}$ wird durch

$$\log_{k,\alpha}(z) := \ln|z| + i(\arg(z) + 2k\pi), \quad \underbrace{z \neq 0,\ \alpha < \arg(z) < \alpha + 2\pi}_{z \in \mathbb{C}_\alpha}$$

eine Funktion $\log_{k,\alpha}$ mit $\exp(\log_{k,\alpha}(z)) = z$, $z \in \mathbb{C}_\alpha$, definiert ($\log_{k,\alpha}$ ist eine Logarithmusfunktion)

Für $\log_{0,-\pi}$ und auch für $\log_{0,0}$ schreiben wir $\log$ und sprechen vom <u>Hauptzweig des komplexen Logarithmus</u> und bezeichnen $\log(z) := \ln|z| + i\arg(z)$

$$z \neq 0,\ -\pi < \arg(z) < \pi \qquad (\alpha = -\pi)$$
$$(\ z \neq 0,\ 0 < \arg(z) < 2\pi\ ) \qquad (\alpha = 0)$$

als <u>Hauptwert des Logarithmus</u>.

<u>Satz 4</u> $w = \log(z) = \ln|z| + i\arg(z),\ \overbrace{z \neq 0, -\pi < \arg(z) < \pi}^{C_{-\pi}}$, ist holomorph. Es gilt $\log'(z) = \frac{1}{z},\ z \in C_{-\pi}$.

4. <u>Potenzen</u>

Es sei $a \in \mathbb{C}$. $\underline{z^a := \exp(a \log(z))}$, für z aus einem Gebiet, in dem eine Log-Fkt definiert ist, also etwa $z \neq 0, -\pi < \arg < \pi$ (oder $z \neq 0,\ 0 < \arg(z) < 2\pi$). Dies ist dann der Hauptwert von z^a.

Für jedes $k \in \mathbb{Z}$ wird durch

$$\exp(a(\ln|z| + i\arg(z) + i2k\pi)) \text{ für } z \neq 0, -\pi < \arg(z) < \pi$$

eine holomorphe Funktion $(z^a)_k$ definiert.

Für $a = \frac{1}{n}$ ($n \in \mathbb{N}$) finden wir hier die Lösungen w der Gleichung $w^n = z$ aus HM I wieder: $w = (\sqrt[n]{z})_k = \sqrt[n]{|z|}\exp\left(i\left(\frac{\arg(z)}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right),\ k \in \mathbb{Z}$

bzw. $k = 0, 1, \dots, n-1$ und $z \neq 0, -\pi < \arg(z) < \pi$ (oder $z \neq 0,\ 0 < \arg(z) < 2\pi$).