24.6 Konforme Abbildungen. Möbiustransformationen

1. Satz 1 (Gebietstreue)

Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f: G \to \mathbb{C}$ holomorph und $f \neq \text{const}$, so ist $f(G)$ ein Gebiet.

Satz 2

Es sei D ein beschränktes Gebiet und G offen mit $\bar{D} \subset G$. $f: G \to \mathbb{C}$ sei schlicht. Dann gelten:

1) $f(\partial D) = \partial f(D)$

2) Die Zuordnung $\partial D \to \partial f(D)$ ist injektiv und orientierungstreu ("Inneres von ∂D geht über in Inneres von $\partial f(D)$. Inneres ist das, was links von der Kurve liegt").

Beispiele: 1) Bilde $G = \{z \mid \operatorname{Re} z > 0\}$ mittels einer geeigneten log-Fkt ab:

z.B.: Verwende $\log(z) = \ln|z| + i\arg(z)$, $z \neq 0$, $-\pi < \arg(z) < \pi$

2) Es ist $G = \{z \mid 1 < |z| < e, \frac{\pi}{4} < \arg(z) < \frac{3\pi}{4}\}$ mit einer log-Fkt, die $\log(i) = \frac{5\pi}{2} i$ erfüllt, abzubilden.

Verwende etwa: $\log(z) = \ln|z| + i(\arg(z) + 2\pi)$

mit $z \neq 0$, $0 < \arg(z) < 2\pi$.

2. Der Punkt "∞". $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Definiert man mit $f(z) = \frac{1}{z}$:

$f(0) := \infty$ und $f(\infty) := 0$,

und $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, so ist $w = f(z) = \frac{1}{z}$

eine bijektive Abbildung: $\hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$.

Bemerkungen

1) Da für $z \in \mathbb{C}$ gilt $|z| < \infty$, können wir sagen:
∞ ist der "Punkt", der außerhalb jeden Kreises um 0 liegt.

2) Vereinbart man folgendes:
— f hat in $z = \infty$ die Eigenschaft E, falls $g(z) = f(\frac{1}{z})$ in $z = 0$ die Eigenschaft E hat und
— ist $f(z_0) = \infty$, so hat f in z_0 die Eigenschaft E, falls $\frac{1}{f}$ in z_0 diese Eigenschaft hat,

so kann man formulieren: $w = f(z) = \frac{1}{z} : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ ist schlicht.

3. Verallgemeinerte Kreise

Def: K ist ein verallgemeinerter Kreis in $\hat{\mathbb{C}}$, falls gilt:
$z \in K \Longleftrightarrow \alpha |z|^2 + \beta z + \overline{\beta} \overline{z} + \gamma = 0$ mit Zahlen
$\alpha, \gamma \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{C}, \alpha\gamma < |\beta|^2$.

Satz 3: Mit Zahlen $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{C}$ mit $\alpha\gamma < |\beta|^2$ wird die Gleichung $(\ast)$ $\alpha |z|^2 + \beta z + \overline{\beta} \overline{z} + \gamma = 0$ betrachtet.

1) Jede Gerade und jeder Kreis in $\mathbb{C}$ besitzt eine Darstellung der Form $(\ast)$.
2) Durch $(\ast)$ wird im Fall $\alpha = 0$ eine Gerade, im Fall $\alpha \neq 0$ ein Kreis beschrieben.

Wir verwenden die folgenden Bezeichnungen:
(Es sei $a \in \mathbb{C}, a \neq 0$ gegeben): $\tau_a(z) := a + z$, $\delta_a(z) = az$,
$\sigma(z) = \frac{1}{z}$. Es gelten: $\tau_a, \delta_a, \sigma : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ sind schlicht.