Satz 4: Es sei $a \in \mathbb{C}, a \neq 0$, beliebig, fest. Es gilt:
τ_a, δ_a, σ bilden verallgemeinerte Kreise auf verallgemeinerte Kreise ab und zwar so:

1/ τ_a, δ_a bilden Kreise auf Kreise und Geraden auf Geraden ab

2/ σ bildet wie folgt ab:
Kreis durch 0 in Gerade nicht durch 0,
Gerade durch 0 in Gerade durch 0,
Kreis nicht durch 0 in Kreis nicht durch 0,
Gerade nicht durch 0 in Kreis durch 0.

Beispiel: $D = \{z \mid |z+1| < 1\} \cup \{z \mid |z-1| < 1\}$ wird durch $w = \frac{1}{z}$ auf $\{w \mid \mathrm{Re}(w) > \frac{1}{2}\} \cup \{w \mid \mathrm{Re}(w) < -\frac{1}{2}\}$ abgebildet.

4. Konforme Abbildungen

Es sei $f: G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $w = f(z)$, in z_0 stetig.

Def: 1/ f heißt in z_0 winkeltreu, wenn für alle Kurven $z_1(t)$, $z_2(t)$ mit $z_1(0) = z_2(0) = z_0$, die in z_0 Tangenten besitzen, auch die Bildkurven $w_1(t) = f(z_1(t))$, $w_2(t) = f(z_2(t))$ für $t = 0$ (in $f(z_0)$) Tangenten besitzen und die Winkel zwischen beiden Tangentenpaaren nach Größe und Drehsinn übereinstimmen.

2/ f heißt in z_0 streckentreu, wenn es eine Zahl $\rho > 0$ gibt mit $\lim\limits_{z \to z_0} \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| = \rho$.

3/ f heißt in z_0 konform, wenn f in z_0 winkel- und streckentreu ist.

<u>Beispiel</u>: $f(z) = \overline{z}$, $z_0 \in \mathbb{C}$.

f ist in z_0 streckentreu, aber nicht winkeltreu, also nicht konform.

<u>Satz 5</u> Ist f in z_0 holomorph und gilt $f'(z_0) \neq 0$, so ist f in z_0 konform.

(insbesondere gilt: ist f in einer Umgebung von z_0 schlicht, so ist f in z_0 konform)

<u>Def:</u> $f: G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist <u>konform auf G</u>, falls

<u>1.</u> f in jedem $z_0 \in G$ konform

und <u>2.</u> f auf G injektiv ist.

<u>Beispiel</u>: Es sei $G = \{z \mid 0 < \operatorname{Im}(z) < 3\pi\}$.

$f(z) = \exp(z)$ ist konform in jedem $z_0 \in G$,

f ist aber nicht konform auf G.

5. <u>Möbiustransformationen</u> (vgl. 3. Ü / A 2)

$a, b, c, d \in \mathbb{C}$ seien gegeben mit $ad - bc \neq 0$: Die Abbildung

$$T: \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}: T(z) := \begin{cases} \dfrac{az+b}{cz+d}, & z \neq \infty, z \neq -\dfrac{d}{c} \\ \infty, & z = -\dfrac{d}{c} \\ \dfrac{a}{c}, & z = \infty \end{cases}$$

heißt <u>Möbiustransformation</u>. Die Menge $\mathcal{M}$ aller Möbiustransformationen mit der Verknüpfungsvorschrift "$\circ$" ist eine Gruppe: d.h. $T, S \in \mathcal{M} \to T \circ S \in \mathcal{M}$

$id \in \mathcal{M}$

zu $T \in \mathcal{M}$ gibt es $T^{-1} \in \mathcal{M}$.

<u>Satz 6</u> $T \in \mathfrak{M}$ ist als Abbildung von $\hat{\mathbb{C}}$ nach $\hat{\mathbb{C}}$ schlicht und surjektiv, also insbesondere überall konform.

<u>Satz 7</u> $T \in \mathfrak{M}$ ist kreistreu: bildet verallgemeinerte Kreise auf verallgemeinerte Kreise ab. Das bedeutet für $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ ($ad-bc \neq 0$) im Fall $c \neq 0$ genauer (vergleiche Satz 4, 2)):

- eine Gerade durch $-\frac{d}{c}$ wird abgebildet auf Gerade durch $\frac{a}{c}$
- eine Gerade nicht durch $-\frac{d}{c}$ " " " " Kreis durch $\frac{a}{c}$
- ein Kreis durch $-\frac{d}{c}$ " " " " Gerade nicht durch $\frac{a}{c}$
- ein Kreis nicht durch $-\frac{d}{c}$ " " " " Kreis " " ".

<u>Ergänzungen</u>: Begründungen einfach. Versuchen Sie es.

<u>Satz 8</u> Eine Möbiustransformation mit mehr als zwei Fixpunkten ist die Identität.

<u>Satz 9</u> $z_1, z_2, z_3 \in \hat{\mathbb{C}}$ seien verschiedene Zahlen und ebenso w_1, w_2, w_3. Dann gibt es genau ein $T \in \mathfrak{M}$ mit $T(z_k) = w_k$, $k = 1,2,3$. Diese Funktion kann implizit so angegeben werden:
$$\frac{T(z)-w_1}{T(z)-w_3} \cdot \frac{w_2-w_3}{w_2-w_1} = \frac{z-z_1}{z-z_3} \cdot \frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}.$$

<u>Beispiel</u>: $w = T(z) = \frac{z-i}{z+i}$ bildet

$G = \{z \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$ konform auf $\{w \mid |w| < 1\}$ ab.

Ü: Versuchen Sie, andere Möbiustransformationen zu finden, die $\operatorname{Im}(z) > 0$ auf $|w| < 1$ abbilden.