24.7 Komplexe Kurvenintegrale. Der Cauchysche Integralsatz und die Cauchysche Integralformel

1. Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $\gamma \subset G$ eine Kurve (= stückweise glatte Kurve) mit der Parameterdarstellung $\zeta = \varphi(t) = x(t) + iy(t)$, $a \le t \le b$ ($x, y \in C^1[a,b]$ stückweise und $\varphi'(t) \neq 0$ für die t, für die $\varphi'(t)$ existiert). Es sei $f: G \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$ ($u = \mathrm{Re}(f)$, $v = \mathrm{Im}(f)$), eine auf G definierte und dort stetige Funktion.

Def: $\underline{\int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta := \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt} = \int_a^b [u(x(t),y(t))x'(t) - v(x(t),y(t))y'(t)]\,dt$

$$+ i\int_a^b [v(x(t),y(t))x'(t) + u(x(t),y(t))y'(t)]\,dt$$

(1.1) $$= \int_\gamma \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} \cdot d\vec{s} + i\int_\gamma \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} \cdot d\vec{s}\,.$$

2. Beispiele: 2.1) Bezeichnet $-\gamma$ die Kurve γ, nur entgegengesetzt durchlaufen, so gilt $\int_{-\gamma} f(\zeta)\,d\zeta = -\int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta$. (HM II)

2.2) $\gamma: \zeta = \varphi(t) = e^{it}$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$: $\int_\gamma \bar{\zeta}^2\,d\zeta = 1 + i$.

2.3) $$\underline{\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta - a| = r} \frac{d\zeta}{(\zeta - a)^k} = \begin{cases} 2\pi i & k = 1 \\ 0 & k \neq 1 \end{cases}} \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (r > 0)$$

2.4) $$\oint_{|\zeta| = 2} |\zeta| \frac{e^\zeta}{\zeta^2}\,d\zeta = 4\pi i$$ (Potenzreihenentwicklung des Integranden)

3. Integralsatz und -formel von Cauchy

3.1. (HM II) $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in C^1(G)$ ist Potentialfeld im einfach-zshgd Gebiet G $\Longleftrightarrow$ $D_1 v_2 = D_2 v_1$ in G $\Longleftrightarrow$ $\oint_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} = 0$ für jede in G verlaufende geschlossene Kurve γ

3.2 Satz 1 (Integralsatz von Cauchy)

Es seien erfüllt: 1. $G \subset \mathbb{C}$ ist einfach zshgd Gebiet

2. $f : G \to \mathbb{C}$ ist holomorph ($f' \in C^0(G)$)

3. γ ist geschlossene Kurve in G

Dann gilt $\oint_\gamma f(\xi)\,d\xi = 0$.

Folgerung: Satz 2: Es seien $\gamma, \gamma_1, \dots, \gamma_m$ geschlossene doppelpunktfreie alle im selben Sinn orientierte Kurven. Die Kurven $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ verlaufen alle im Innengebiet von γ und jede Kurven γ_j liegt im Außengebiet jeder anderen Kurve γ_k ($j \neq k$). Die Kurven γ und γ_k ($k = 1, 2, \dots, m$) und das Gebiet dazwischen liegen im Gebiet G, in dem die Funktion f holomorph ist. Es gilt dann:

$$\oint_\gamma f(\xi)\,d\xi = \sum_{k=1}^{m} \oint_{\gamma_k} f(\xi)\,d\xi.$$

3.3 Beispiele:

1) (vgl. 2.3) (Satz 2 mit $m = 1$)

γ sei eine geschlossene doppelpunktfreie positiv orientierte Kurve. a liege im Innengebiet von γ:

$$\oint_\gamma \frac{d\xi}{(\xi - a)^k} = \begin{cases} 2\pi i & k = 1 \\ 0 & k \neq 1 \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

2) (vgl. 2.4)
$$\oint_{|\xi + \frac{1}{2}| = 1} \frac{e^\xi}{\xi^2}\,d\xi = 2\pi i$$

3) (Satz 2 mit $m = 2$ und $m = 1$, Satz 1 und Partialbruchzerlegung)

$$\oint_\gamma \frac{2\xi - 1}{\xi^2 - \xi}\,d\xi = 4\pi i$$ (γ geschlossene positiv orientierte doppelpunktfreie Kurve, die 0, 1 umschließt)