3.4 **Satz 3** (Die Cauchysche Integralformel)

Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ sei holomorph und $\gamma \subset G$ eine geschlossene doppelpunktfreie positiv orientierte Kurve, deren Inneres zu G gehört. Dann hat man für jeden Punkt z aus dem Innengebiet von γ

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi \quad .$$

(Setze in 3.3 Beispiel 1) $k = 1$, $a = z$ und $f = 1$)

Beispiel hierzu: Nochmal 3.3, 3) und im folgenden die Laurent- und Potenzreihenentwicklung.

24.8 Laurententwicklung. Potenzreihenentwicklung.

1. Die beiden Reihen $R_+ : \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k$ und $R_- : \sum_{k=1}^{\infty} \mu_{-k}$ werden zu $R : \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mu_k$ zusammengefasst.

Def: R konvergiert, falls R_+ und R_- konvergieren, Es gilt dann $\sum_{k=0}^{\infty} \mu_k + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_{-k} =: \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mu_k$.

2. **Satz 1**: a_k, $k \in \mathbb{Z}$, sind gegebene komplexe Zahlen und $R_1 := \limsup_{k\in\mathbb{N}} \sqrt[k]{|a_{-k}|}$ und $R_2 := \dfrac{1}{\limsup \sqrt[k]{|a_k|}}$ und

$A = \{z \mid R_1 < |z| < R_2\}$. Es gilt:

$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k z^k$ konvergiert für alle $z \in A$. Gilt $R_1 < R_2$ so ist $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k z^k =: f(z)$ in A holomorph.

Satz 2. Ist f in $A = \{z \mid R_1 < |z| < R_2\}$ $(0 \le R_1 < R_2)$ holomorph, so besitzt f in A eine Laurententwicklung, d.h. es gilt

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k \quad , z \in A$$

mit $a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi|=\rho} \frac{f(\xi)}{\xi^{k+1}} d\xi$, $k \in \mathbb{Z}$. Hierbei ist ρ eine beliebige Zahl mit $R_1 < \rho < R_2$.
Für jedes Paar von Zahlen r_1, r_2 mit $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$ ist die Konvergenz in $\{z \mid r_1 \le |z| \le r_2\}$ gleichmäßig.

3. Bemerkungen

3.1 Ist f holomorph in $A = \{z \mid R_1 < |z - z_0| < R_2\}$, dann hat $f(z)$ für jedes $z \in A$ die eindeutige Darstellung

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

mit $a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi - z_0| = \rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{k+1}} d\xi$ mit $R_1 < \rho < R_2$ und für $k \in \mathbb{Z}$.

(Wende Satz 2 auf $g(z) := f(z + z_0)$ an und ersetze dann g durch f)

3.2 In der Laurentreihe $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ heißt

$\sum_{k=-\infty}^{-1} a_k (z - z_0)^k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} (z - z_0)^{-k}$ der Hauptteil und

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ der Nebenteil.