3.3. Bei der Berechnung der a_k in 3.1 kann als Integrationskurve anstelle von $|\xi - z_0| = \rho$ eine beliebige einfach geschlossene positiv orientierte Kurve $\mathring{\gamma}$ in A, die z_0 in ihrem Innern enthält, gewählt werden.

4. Satz 3 (Taylorentwicklung)

Es sei f holomorph in $D = \{z \mid |z - z_0| < R_2\}$. Dann gilt für alle $z \in D$ die Darstellung $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$

mit $a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathring{\gamma}} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{k+1}} d\xi$, $k = 0, 1, \dots$.

(*) Hierbei ist $\mathring{\gamma}$ eine beliebige positiv orientierte einfach geschlossene Kurve, die z_0 im Innern enthält.

Folgerung 1 Eine holomorphe Funktion ist in ihrem Definitionsbereich beliebig oft diff'bar.

Folgerung 2 (Cauchy Integralformel für die Ableitungen) (vgl. 24.7/Satz 3)

Es sei f holomorph in $D = \{z \mid |z - z_0| < R_2\}$. Dann gilt für jede Kurve γ wie in Satz 3 (*):

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{k+1}} d\xi, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Beispiel: Es ist $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ um $z_0 = 0$ zu entwickeln in 1) $|z| < 1$, 2) $1 < |z| < 2$, 3) $|z| > 2$.

Es ist $f(z)$ um $z_0 = 1$ zu entwickeln derart, dass die Reihe in $3/2$ (in $5/2$) konvergiert.

24.9 Isolierte Singularitäten. Der Residuensatz

1) Def: Es sei f in $\{z \mid 0<|z-z_0|<R\}$ holomorph und sei nicht holomorph in $\{z \mid |z-z_0|<R\}$.
z_0 heißt dann isolierte Singularität von f.

Bsp: $z_0=0$ ist nicht isolierte Singularität für
$f_1(z)=\frac{1}{\sin\frac{1}{z}}$ ($z_0=0$ ist Häufungspunkt isolierter Singularitäten $z_k=\frac{1}{k\pi}$, $k\in\mathbb{N}$)

und $f_2(z)=\log(z)=\ln|z|+i\arg(z)$ ($z\neq 0$, $-\pi<\arg(z)\leq\pi$).
Bei f_2 ist jeder Punkt von $\arg(z)=\pi$ nichtisolierte Singularität.
$z_0=0$ ist isolierte Singularität für
$f_3(z)=\frac{\sin z}{z}$, $f_4(z)=\frac{1}{\sin(z)}$, $f_5(z)=e^{\frac{1}{z}}$.

Def: Es sei z_0 isolierte Singularität von f. $f(z)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k(z-z_0)^k$ sei die Laurentreihe von f in $0<|z-z_0|<R$ um z_0.
z_0 heißt hebbare Singularität, falls $a_k=0$ für alle $k\leq -1$;
z_0 heißt Polstelle der Ordnung p ($p\in\mathbb{N}\cup\{0\}$), falls $a_k=0$ für $k\leq -p-1$ und $a_{-p}\neq 0$ gelten;
z_0 heißt wesentliche Singularität, falls $a_k\neq 0$ gilt für unendlich viele Indizes $k<0$.

Beisp: $z_0=0$ ist für f_3 eine hebbare Singularität, für f_4 eine Polstelle der Ordnung 1 und für f_5 eine wesentliche Singularität.

zu f_5: $|e^{\frac{1}{z}}|$ zeigt für $z\to 0$ kein definiertes Verhalten:
$\lim_{x\to 0+} e^{\frac{1}{x}}=\infty$, $\lim_{x\to 0-} e^{\frac{1}{x}}=0$, $\lim_{y\to 0} e^{\frac{1}{iy}}$ existiert nicht.