Satz 1 (7. Ü, A6)

f hat in z_0 einen Pol der Ordnung p

$\Longleftrightarrow$ es gilt $f(z) = (z-z_0)^{-p} g(z)$ mit einer in z_0 holomorphen Funktion g, für die $g(z_0) \neq 0$ erfüllt ist

$\Longleftrightarrow$ $\frac{1}{f}$ hat in z_0 eine Nullstelle der Ordnung p und ist in z_0 holomorph.

---

2. Residuum, Residuensatz.

$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k$ sei die Laurententwicklung

in $0 < |z-z_0| < R$ um die isolierte Singularität z_0.

$a_{-1} =: \operatorname{Res}(f, z_0)$ heißt das Residuum von f in z_0.

Es gilt $\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma f(z)\,dz$, wobei γ eine einfach geschlossene positiv orientierte z_0 umlaufende Kurve in $0 < |z-z_0| < R$ ist. (siehe auch S. 16, Bemerkung 3.1)

Satz 2 (Der Residuensatz)

Es sei f bis auf isolierte Singularitäten im Gebiet G holomorph, $\gamma \subset G$ sei eine einfach geschlossene positiv orientierte Kurve, die endlich viele $(z_1, z_2, \ldots, z_N)$ der Singularitäten umschließt aber selbst durch keine Singularität ~~verläuft~~.

Dann gilt: $\oint_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \operatorname{Res}(f, z_k)$.

(siehe S. 14, Satz 2)

<u>Satz 3</u>

Hat f in z_0 einen Pol der Ordnung p, so gilt

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(p-1)!} \lim_{z \to z_0} D^{p-1}\left[(z-z_0)^p f(z)\right].$$

Im Fall $p=1$ sieht das so aus: $\operatorname{Res}(f, z_0) = (z-z_0) f(z)\big|_{z=z_0}$.

<u>Satz 4</u> Es sei $f = \frac{g}{h}$ mit holomorphen Funktionen g und h und mit $g(z_0) \neq 0$, $h(z_0) = 0$, $h'(z_0) \neq 0$. Dann gilt

$$\operatorname{Res}\left(\frac{g}{h}, z_0\right) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

<u>Beispiel</u> $f(z) = \frac{1}{1+z^n}$ $(n \in \mathbb{N})$ hat die n Polstellen 1. Ordnung $z_k = e^{i\frac{\pi}{n} + i2(k-1)\frac{\pi}{n}}$, $k = 1, \dots, n$ (HMI).

Es gilt $\operatorname{Res}(f, z_k) = -\frac{1}{n} z_k$ $(k = 1, \dots, n)$

---

3. <u>Auswertung reeller Integrale</u>

<u>3.1</u> S.4, A 3, A 5

<u>3.2</u> <u>Satz 5</u>

Es sei $R = R(x,y)$ eine rationale Funktion in zwei Variablen. $g(t) := R(\sin t, \cos t)$ sei stetig für $0 \le t \le 2\pi$. Definiert man $f(z) = \frac{1}{iz} R\left(\frac{z^2-1}{2iz}, \frac{z^2+1}{2z}\right)$, so gilt

$$\int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t)\, dt = \oint_{|z|=1} f(z)\, dz.$$

<u>Beispiel:</u> $$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{dt}{a^2 - 2a\cos t + 1} = \begin{cases} \frac{1}{1-a^2}, & |a| < 1 \\ 1, & a = 0 \\ \frac{1}{a^2-1}, & |a| > 1 \end{cases}$$

3.3 Satz 6

Es sei G ein Gebiet mit $\{z \mid \operatorname{Im}(z) \geq 0\} \subset G$.
$f: G \to \mathbb{C}$ sei holomorph bis auf in endlich vielen Polstellen, von denen keine reell ist.
$z_1, \dots, z_s$ seien die Polstellen von f in $\{z \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$.
Es gelte $(*)$ $\lim\limits_{R\to\infty} \int_0^{\pi} f(Re^{it}) Re^{it}\, dt = 0$.

Dann hat man $\lim\limits_{R\to\infty} \int_{-R}^{+R} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{s} \operatorname{Res}(f, z_k)$.

Bemerkungen, Beispiel

1. G und f seien wie in Satz 6, gibt es Zahlen $R_0 > 0$, $M > 0$ und $\alpha > 1$ mit:
$(**)$ Es gilt $|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^{\alpha}}$ für alle z mit $\operatorname{Im}(z) \geq 0$ und $|z| > R_0$,
so ist die Voraussetzung $(*)$ aus Satz 6 erfüllt.

2. Gilt $f = \frac{p}{q}$ mit Polynomen $p = p(z)$ und $q = q(z)$, für die gilt: $\operatorname{grad} q - \operatorname{grad} p \geq 2$.
Dann ist $(**)$ mit $\alpha = 2$ für genügend großes R_0 erfüllt.

3. Wende Satz 6 an: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{2}$