## 25.1 Der Existenz- und Eindeutigkeitssatz (Picard, Lindelöf)

Es liegt vor das Anfangswertproblem (AWP)

(1) $y' = f(x,y)$ , $y(x_0) = y_0$

1. Es seien $I_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| \leq \alpha\}$, $I_2 = \{y \mid |y - y_0| \leq \beta\}$, $D := I_1 \times I_2$ und $f: D \to \mathbb{R}$ stetig und $M := \max\limits_D |f(x,y)|$.

2. Eine Lösung von (1) ist eine $C^1$-Funktion $\varphi: \tilde{I}_1 \subset I_1 \to I_2$ ($x_0 \in \tilde{I}_1$) mit $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$, $x \in \tilde{I}_1$, und $\varphi(x_0) = y_0$.

3. Satz 1 („Äquivalenz von (1) mit einer Integralgleichung")
$\varphi$ ist Lösung von (1) $\Longleftrightarrow$ es gilt $\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\,dt$, $x \in \tilde{I}_1$.

4. Def: $f: D \to \mathbb{R}$ genügt einer Lipschitz-Bedingung, falls es eine Zahl $L > 0$ so gibt, dass für alle $x \in I_1$ und alle $y, \tilde{y} \in I_2$ $|f(x,y) - f(x,\tilde{y})| \leq L|y - \tilde{y}|$ gilt.

Bemerkung: Existiert $D_2 f$ und gilt $D_2 f \in C(D)$, so genügt $f$ einer Lipschitz-Bedingung.

5. Satz 2 (Eindeutigkeitssatz)
$f \in C(D)$ genüge einer Lipschitz-Bedingung. $\varphi, \psi: \tilde{I}_1 \to I_2$ seien Lösungen von (1) (d.h. auch $\varphi(x_0) = \psi(x_0)$).
Dann gilt $\varphi(x) = \psi(x)$, $x \in \tilde{I}_1$.

Beispiel: $y' = 3y^{2/3}$, $y(0) = 0$ (*)

Lösungen: 1) $y = \varphi(x) = 0$ $\forall x$

2) Seien $a, b$ beliebig mit $a < 0 < b$: $y = \varphi(x) = \begin{cases} (x-a)^3 & x < a \\ 0 & a \leq x \leq b \\ (x-b)^3 & b < x \end{cases}$

Das sind viele Lösungen von (*)

6. Satz 3 (Der Existenz- und Eindeutigkeitssatz)

$f \in C(D)$ genüge einer Lipschitz Bedingung; $\alpha, \beta, M, D$ seien wie unter 1.. Es sei $\delta := \min\{\alpha, \frac{\beta}{M}\}$.
Dann gibt es auf $I_\delta(x_0) := \{x \mid |x - x_0| < \delta\}$ genau eine Lösung des AWP (1).

: Die zu (1) äquivalente Integralgleichung

(2) $$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\,dt\,, \quad x \in I_\delta(x_0)$$

wird iterativ mittels der sog. Picard Iteration gelöst:
Definiere die Funktionenfolge $\varphi_n : I_\delta(x_0) \to I_2$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$ durch:

$$\varphi_0(x) := y_0 \qquad x \in I_\delta(x_0)$$

$$\varphi_{n+1}(x) := y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_n(t))\,dt\,, \quad x \in I_\delta(x_0)$$

und weise nach, dass die $\varphi_n$ auf $I_\delta(x_0)$ gleichmäßig konvergieren. Die Grenzfunktion löst (2) und also (1). :