Karlsruher Institut für Technologie (KIT) WS 2012/2013
Institut für Analysis
Priv.Doz. Dr. Peer Kunstmann
Dr. Semjon Wugalter

Höhere Mathematik III für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 2. Übungsblatt

Aufgabe 6 **a)** Die Gleichung lässt sich für $x \neq 0$ in der Form

$$y' = \frac{1+y^2}{y}\frac{1}{x(1+x^2)}$$

schreiben. Es handelt sich um eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen $y' = f(x)g(y)$, wobei

$$g(y) = \frac{1+y^2}{y}, \qquad f(x) = \frac{1}{x(1+x^2)}.$$

Die Lösung y des Anfangswertproblems ist gegeben durch (Beachte: $g(2) = 5/2 \neq 0$)

$$\int_2^{y(x)} \frac{d\eta}{g(\eta)} = \int_1^x f(t)\,dt.$$

Für den Integranden auf der rechten Seite gilt

$$\frac{1}{t(1+t^2)} = \frac{1+t^2-t^2}{t(1+t^2)} = \frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2},$$

und damit bekommt man für das Integral der rechten Seite

$$\int_1^x f(t)\,dt = \int_1^x \frac{1}{t} - \frac{1}{2}\frac{2t}{1+t^2}\,dt = \left[\ln|t| - \tfrac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]_1^x = \ln|x| - \tfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + \tfrac{1}{2}\ln 2.$$

Außerdem gilt

$$\int_2^{y(x)} \frac{d\eta}{g(\eta)} = \int_2^{y(x)} \frac{\eta}{1+\eta^2}\,d\eta = \left[\tfrac{1}{2}\ln(1+\eta^2)\right]_2^{y(x)} = \tfrac{1}{2}\ln(1+y(x)^2) - \tfrac{1}{2}\ln 5.$$

Gleichsetzen der Integrale und Multiplikation mit 2 liefert

$$\ln(1+y(x)^2) = \underbrace{2\ln|x|}_{=\ln x^2} - \ln(1+x^2) + \underbrace{\ln 2 + \ln 5}_{=\ln 10}$$

bzw.

$$1 + y(x)^2 = e^{\ln x^2}\cdot\frac{1}{e^{\ln(1+x^2)}}\cdot e^{\ln 10} = \frac{10x^2}{1+x^2}.$$

Die Lösung ist somit

$$y(x) = \sqrt{\frac{10x^2}{1+x^2} - 1} = \sqrt{\frac{9x^2-1}{1+x^2}},$$

und zwar für $x > \frac{1}{3}$. (Dabei ergibt sich das Vorzeichen der Wurzel aus $y(1) = 2 > 0$.)

b) Es handelt sich um eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen

$$\cos 3y\;dy + \sin 2x\;dx = 0 \iff \cos 3y\;dy = -\sin 2x\;dx.$$

Nach der Integration bekommt man

$$-\frac{1}{3}\sin 3y + \frac{1}{2}\cos 2x + C = 0.$$

Aus der Anfangsbedingung folgt, dass $C = \frac{1}{2}$ ist. Die implizierte Lösung des Problems ist

$$F := -\frac{1}{3}\sin 3y + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2} = 0.$$

Eine explizierte Lösung im Punkt $(x, y) = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3})$ existiert nicht, weil

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{3})} = 0.$$

c) Die Gleichung ist eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen. Für $y \neq 0$ gilt

$$4y^3 dy = x(x^2+1)dx \Longleftrightarrow d(y^4) = \frac{1}{2}(x^2+1)d(x^2+1).$$

Nach der Integration bekommt man

$$y^4 = \frac{1}{4}(x^2+1)^2 + C.$$

Aus der Anfangsbedingung folgt, dass $C = 0$ und $y = -\frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}$ ist. Offensichtlich gilt $y \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und die Lösung auf $\mathbb{R}$ definiert.

Aufgabe 7 **a)** Die Differentialgleichung ist von der Form $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$, wobei $P(x,y) := 2x\sin y$, $Q(x,y) = x^2\cos y$. Offenbar gilt $P, Q \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Damit ist laut Vorlesung die Differentialgleichung exakt, falls $P_y = Q_x$ gilt. Das ist hier der Fall, denn $P_y = 2x\cos y = Q_x$.

Wir bestimmen nun eine Stammfunktion F der Differentialgleichung. Die Forderung $F_x = P = 2x\sin y$ führt auf

$$F(x,y) = x^2\sin y + c(y)$$

mit einer gewissen Funktion c. Hieraus folgt

$$F_y(x,y) = x^2\cos y + c'(y) \stackrel{!}{=} Q(x,y) = x^2\cos y\,.$$

Somit ist $c'(y) = 0$, und wir wählen $c \equiv 0$. Dann gilt als $F(x,y) = x^2\sin y$.

Nach Satz 1 in 1.6 läßt sich jede Lösung y der Differentialgleichung dann in impliziter Form $F(x, y(x)) = C$, also $x^2\sin y(x) = C$, mit $C \in \mathbb{R}$ schreiben.

b) Setzen wir die Anfangsbedingung $y(1) = \frac{9}{4}\pi$ in diese Gleichung ein, so folgt $1^2\sin(\frac{9}{4}\pi) = C$, also $C = \sqrt{2}/2$.

Wir versuchen nun, die Gleichung $F(x, y(x)) = C$, also $x^2\sin y = \sqrt{2}/2$ nach y aufzulösen. Die Gleichung $x^2\sin y = \sqrt{2}/2$ kann nur für $x^2 \geqslant \sqrt{2}/2$ erfüllt sein. Es muss also $|x| \geqslant 1/\sqrt[4]{2}$ gelten. Wegen $x_0 = 1 \in [1/\sqrt[4]{2}, \infty)$ beschränken wir uns auf $x \geqslant 1/\sqrt[4]{2}$. In diesem Fall gilt $\sin(y(x)) = \frac{\sqrt{2}}{2x^2}$. Zusammen mit $y(1) = \frac{9}{4}\pi$ erhalten wir die Lösung

$$y(x) = 2\pi + \arcsin(\frac{\sqrt{2}}{2x^2}) \qquad \text{für } x > 1/\sqrt[4]{2}\,.$$

(Bekanntlich ist die Funktion arcsin in 1 nicht differenzierbar. Somit gehört die Stelle $1/\sqrt[4]{2}$ nicht zum Definitionsintervall der Lösung y, weil die Lösung einer Differentialgleichung gemäß Definition differenzierbar ist.)

Aufgabe 8 **a)** Die Differentialgleichung ist von der Form $P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0$ mit $P(x,y):=2x+4y+2$ und $Q(x,y):=4x+12y+8$. Für die auf $\mathbb{R}^2$ stetig differenzierbaren Funktionen P und Q gilt $P_y(x,y)=4=Q_x(x,y)$, d. h. die Differentialgleichung ist exakt. Wir suchen daher eine Stammfunktion F, also eine Funktion mit $\operatorname{grad} F=(P,Q)$. Aus der Forderung

$$F_x(x,y)\overset{!}{=}P(x,y)=2x+4y+2$$

ergibt sich, dass die gesuchte Stammfunktion F eine Darstellung der Form

$$F(x,y)=x^2+4xy+2x+c(y)$$

mit einer stetig differenzierbaren Funktion c haben muss. Also erhält man

$$F_y(x,y)=4x+c'(y)\overset{!}{=}Q(x,y)=4x+12y+8\,,$$

und damit die Gleichung $c'(y)=12y+8$. Diese kann z.B. durch $c(y)=6y^2+8y$ erfüllt werden. Eine Stammfunktion der Differentialgleichung ist somit

$$F(x,y)=x^2+4xy+2x+6y^2+8y\,.$$

Nach Satz 1 in 1.6 läßt sich jede Lösung y der Differentialgleichung dann in impliziter Form $F(x,y(x))=C$, also $x^2+4xy+2x+6y^2+8y=C$, mit $C\in\mathbb{R}$ schreiben.
Aus der Anfangsbedingung $y(0)=-1$ folgt wegen $F(0,-1)=6-8=-2$, dass man $C=-2$ wählen muss. Folglich ist

$$x^2+4xy+2x+6y^2+8y=-2$$

die implizite Lösung des Anfangswertproblems, und man kann noch explizit auflösen:

$$y(x)=\frac{-(4x+8)-\sqrt{(4x+8)^2-24(x^2+2x+2)}}{12}=\frac{-x-2-\sqrt{-x^2/2+x+1}}{3},$$

wobei $x\in(1-\sqrt{3},1+\sqrt{3})$. Das Vorzeichen vor der Wurzel ergibt sich dabei aus der Anfangsbedingung $y(0)=-1$.

b) Die Differentialgleichung ist von der Form $P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0$ mit $P(x,y):=2x(y+e^{(x^2)})$ und $Q(x,y):=x^2+3$. Für die auf $\mathbb{R}^2$ stetig differenzierbaren Funktionen P und Q gilt $P_y(x,y)=2x=Q_x(x,y)$, d. h. die Differentialgleichung ist exakt. Wir suchen daher eine Stammfunktion F, also eine Funktion mit $\operatorname{grad} F=(P,Q)$. Aus der Forderung

$$F_x(x,y)\overset{!}{=}P(x,y)=2x(y+e^{(x^2)})=2xy+2xe^{(x^2)}$$

ergibt sich, dass die gesuchte Stammfunktion F eine Darstellung der Form

$$F(x,y)=x^2y+e^{(x^2)}+c(y)$$

mit einer stetig differenzierbaren Funktion c haben muss. Also erhält man

$$F_y(x,y)=x^2+c'(y)\overset{!}{=}Q(x,y)=x^2+3\,,$$

und damit die Gleichung $c'(y)=3$. Diese kann durch $c(y)=3y$ erfüllt werden. Eine Stammfunktion der Differentialgleichung ist somit

$$F(x,y)=x^2y+e^{(x^2)}+3y\,.$$

Nach Satz 1 in 1.6 läßt sich jede Lösung y der Differentialgleichung dann in impliziter Form $F(x,y(x))=C$, also $x^2y+e^{(x^2)}+3y=C$, mit $C\in\mathbb{R}$ schreiben.
Aus der Anfangsbedingung $y(2)=1$ folgt wegen $F(2,1)=4+e^4+3=7+e^4$, dass man $C=7+e^4$ wählen muss. Folglich ist

$$x^2y+e^{(x^2)}+3y=7+e^4$$

die implizite Lösung des Anfangswertproblems, und man kann noch explizit auflösen:

$$y(x)=\frac{7+e^4-e^{(x^2)}}{x^2+3}\qquad \text{für } x\in\mathbb{R}.$$

Aufgabe 9 Die Gleichung ist von der Form $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ mit $P(x,y) = \frac{1}{x^2} + 2y^2$ und $Q(x,y) = yx$. Gesucht ist ein nur von x abhängender integrierender Faktor $\mu = \mu(x)$. Für einen solchen gilt $\mu_y = 0$ und $\mu_x = \mu'$. Aus der Bedingung $(\mu P)_y = (\mu Q)_x$, also $P\mu_y - Q\mu_x = \mu(Q_x - P_y)$, ergibt sich

$$-yx\mu'(x) = \mu(x)(y - 4y) = \mu(x)(-3y),$$

was für $y \neq 0$ ($y(x) = 0$ ist offenbar keine Lösung der Differentialgleichung) auf

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{3}{x}$$

führt. Diese homogene lineare Differentialgleichung hat die allgemeine Lösung $\mu(x) = Cx^3$, $C \in \mathbb{R}$. Wir wählen $C = 1$ und erhalten $\mu(x) = x^3$ als integrierenden Faktor. Somit ist die Gleichung

$$(x + 2x^3y^2)\,dx + yx^4\,dy = 0$$

exakt. Wir bestimmen nun eine Funktion F mit $F_x(x,y) = x + 2x^3y^2$ und $F_y(x,y) = yx^4$. Die erste Bedingung liefert

$$F(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^4y^2 + c(y)$$

mit einer gewissen Funktion c. Also erhält man

$$F_y(x,y) = yx^4 + c'(y) \stackrel{!}{=} yx^4$$

und damit $c'(y) = 0$. Dies ist etwa für $c \equiv 0$ erfüllt, so dass $F(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^4y^2$ ist. Darum ist die allgemeine Lösung in impliziter Form gegeben durch $F(x, y(x)) = \text{const}$, also $x^2 + x^4y(x)^2 = \text{const}$.

Aufgabe 10 Damit $\mu(x,y)$ ein integrierender Faktor für die Differentialgleichung $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ ist, muss gelten:

$$(\mu P)_y = (\mu Q)_x\,, \qquad \text{also} \qquad \mu_y P + \mu P_y = \mu_x Q + \mu Q_x\,.$$

Wir müssen daher μ jeweils so bestimmen, dass die folgende Gleichung erfüllt ist:

$$\mu[P_y - Q_x] = \mu_x Q - \mu_y P\,. \tag{$*$}$$

teila Diese Differentialgleichung ist von der Form $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ mit

$$P(x,y) := x + x^4 + 2x^2y^2 + y^4\,, \qquad Q(x,y) := y\,.$$

Für $\mu(x,y) = \rho(x^2+y^2)$ gilt $\mu_x(x,y) = 2x\rho'(x^2+y^2)$ und $\mu_y(x,y) = 2y\rho'(x^2+y^2)$. Gleichung ($*$) wird daher zu

$$\rho(x^2+y^2)\big[(4x^2y + 4y^3) - 0\big] = 2x\rho'(x^2+y^2)y - 2y\rho'(x^2+y^2)(x + x^4 + 2x^2y^2 + y^4)\,.$$

Zusammengefasst haben wir

$$4y(x^2+y^2)\rho(x^2+y^2) = -2y(x^4 + 2x^2y^2 + y^4)\rho'(x^2+y^2)\,.$$

Da $y(x) = 0$ offenbar keine Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung ist, dividieren wir durch y und setzen $t := x^2 + y^2$. Dies führt wegen $x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = t^2$ auf

$$4t\rho(t) = -2t^2\rho'(t)\,, \qquad \text{also} \qquad \rho'(t) = -\frac{2}{t}\,\rho(t)\,.$$

Eine Lösung dieser homogenen linearen Differentialgleichung für ρ ist $\rho(t) = \exp\big(\int -2/t\,dt\big) = e^{-2\ln t} = t^{-2}$. Damit wissen wir:

$$\mu(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^2}$$

ist für $x^2+y^2 \neq 0$ ein integrierender Faktor. Wir betrachten daher die exakte Differentialgleichung, die sich aus der ursprünglichen Gleichung durch Multiplikation mit $\mu(x,y)$ ergibt, also

$$\left(\frac{x}{(x^2+y^2)^2}+1\right)dx+\frac{y}{(x^2+y^2)^2}\,dy=0\,,$$

und bestimmen eine zugehörige Stammfunktion F. Aus $F_y(x,y)=y/(x^2+y^2)^2$ folgt

$$F(x,y)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+y^2}+c(x)$$

mit einer gewissen Funktion c. Also erhalten wir

$$F_x(x,y)=\frac{x}{(x^2+y^2)^2}+c'(x)\stackrel{!}{=}\frac{x}{(x^2+y^2)^2}+1\,.$$

Damit $c'(x)=1$ gilt, wählen wir $c(x)=x$. Mit $F(x,y)=-\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-1}+x$ erhält man die allgemeine implizite Lösung $F(x,y)=A$, und Multiplikation mit -2 liefert

$$\frac{1}{x^2+y^2}-2x=C\qquad(C\in\mathbb{R})\,.$$

b) Hier gilt $P(x,y)=xy+\tan(xy)$ und $Q(x,y)=x^2$. Mit dem gegebenen Ansatz für μ hat man $\mu_x(x,y)=y\rho'(xy)$ und $\mu_y(x,y)=x\rho'(xy)$.
Die Bedingung $(*)$ liefert in diesem Falle

$$\rho(xy)\big[x+x\big(1+\tan^2(xy)\big)-2x\big]=y\rho'(xy)x^2-x\rho'(xy)\big(xy+\tan(xy)\big)\,,$$

zusammengefasst also

$$x\tan^2(xy)\rho(xy)=-x\tan(xy)\rho'(xy)\,.$$

Die Gleichung $P(x,y)\,dy+Q(x,y)\,dy=0$ hat zwar $x(y)=0$ als eine Lösung, aber die ursprünglich gegebene Gleichung ist für eine Funktion $y=y(x)$. Wir dividieren daher durch x und setzen $t:=xy$. Dann ergibt sich

$$\big(\rho(t)\tan t+\rho'(t)\big)\tan t=0\,.$$

Die Differentialgleichung $\rho'(t)=-(\tan t)\rho(t)$ ist beispielsweise für $\rho(t)=\cos t$ erfüllt. Ein integrierender Faktor ist folglich $\mu(x,y)=\cos(xy)$, allerdings nur für (x,y) mit $xy\neq\frac{1}{2}\pi+k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$. Da $\tan(xy)$ in der zu lösenden Differentialgleichung vorkommt, ist die Gleichung an diesen Stellen aber sowieso nicht definiert. Wir multiplizieren also mit $\cos(xy)$ und erhalten

$$\big(xy\cos(xy)+\sin(xy)\big)\,dx+x^2\cos(xy)\,dy=0\,.$$

Für eine Stammfunktion F soll $F_y(x,y)=x^2\cos(xy)$ gelten. Folglich ist

$$F(x,y)=x\sin(xy)+c(x)$$

mit einer gewissen Funktion c. Hieraus ergibt sich

$$F_x(x,y)=\sin(xy)+xy\cos(xy)+c'(x)\stackrel{!}{=}xy\cos(xy)+\sin(xy)\,.$$

Wir wählen $c(x)=0$, und mit der Stammfunktion $F(x,y)=x\sin(xy)$ lassen sich sämtliche Lösungen y in impliziter Form darstellen durch

$$x\sin(xy)=C\qquad(C\in\mathbb{R})\,.$$