Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.Doz. Dr. Peer Kunstmann
Dr. Semjon Wugalter WS 2012/2013

Höhere Mathematik III für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 3. Übungsblatt

Aufgabe 11 **a)** Es handelt sich um eine Implizite Differentialgleichung. Offensichtlich hat diese Gleichung keine Lösung der Form $\varphi(x) = ax + b$. Wir führen t als Parameter für y' ein und betrachten $x = \psi(t), y = \chi(t)$. Wir haben $t = \frac{\chi'}{\psi'}$. Aus der Differentialgleichung bekommen wir, dass

$$\chi(t) = \frac{1}{2}\psi^2 - \psi(t)t + t^2 \Rightarrow \chi(t)' = \psi(t)\psi'(t) - \psi(t) - t\psi'(t) + 2t \Leftrightarrow \psi'(2t - \psi) = (2t - \psi).$$

Die letzte Gleichung hat zwei Lösungen : $\psi'(t) = 1$ und $\psi = 2t$. In dem ersten Fall bekommen wir

$$\psi' = 1 \Leftrightarrow x'_t = 1 \Leftrightarrow x = t + C \Leftrightarrow x = y' + C \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x^2 - C_1x + C_2.$$

Die Substitution in die Gleichung zeigt, dass $y = \frac{1}{2}x^2 - Cx + C^2$ ist.
In dem zweiten Fall gilt

$$x = 2y' \Leftrightarrow y' = \frac{x}{2} \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}x^2 + C.$$

Die Substitution in die Gleichung zeigt, dass $C = 0$ ist.

b) Die Gleichung ist eine d'Alambert-Gleichung, die keine Lösung der Form $y = ax + b$ hat. Nach der Parametrisierung $y' = t, x = \psi(t), y = \chi(t)$ bekommen wir

$$\chi(t) = 2t\psi(t) - 4t^3 \Rightarrow \chi' = 2\psi + 2t\psi' - 12t^2 \Leftrightarrow t\psi' = 2\psi + 2t\psi' - 12t^2.$$

Die letzte Gleichung ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung. Die zugehörige homogene Gleichung hat die Lösung $\psi_h = Ct^{-2}$ und die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung ist $\psi = Ct^{-2} + 3t^2$. Aus der Relation $\chi(t) = 2t\psi(t) - 4t^3$ folgt, dass $\chi = 2Ct^{-1} + 2t^3$ ist.

Aufgabe 12 Es handelt sich um eine implizite Differentialgleichung der Form $F(x, y, y') = 0$ mit $F(x, y, z) = \ln^2(z) + z - x$. Wir gehen wie in 1.8 (a), (b) des Vorlesungsskripts vor:

a) Der Ansatz $F(x, ax + b, a) = 0$ liefert $x = \ln^2(a) + a$. Es gibt kein Intervall I so, dass diese Gleichung für alle $x \in I$ gilt. Es gibt also keine Geraden als Lösungen.

b) Wir machen den Ansatz $t = y', \chi(t) = y, \psi(t) = x$ und erhalten $\psi(t) = \ln^2(t) + t$ sowie $\dot\chi(t) = t\dot\psi(t)$. Damit folgt $\dot\chi(t) = t\dot\psi(t) = t(2\frac{\ln t}{t} + 1) = 2\ln t + t$ und somit $\chi(t) = \int 2\ln t + t\,dt = 2(t\ln t - t) + \frac{1}{2}t^2 + C = \frac{1}{2}t^2 + 2t\ln t - 2t + C$. Für $t_0 = 1$ gilt $\psi(t_0) = 1$. Damit folgt mit der Anfangswertbedingung $y_0 = y(1) = \chi(t_0) = \frac{1}{2}t_0^2 + 2t_0\ln t_0 - 2t_0 + C = -3/2 + C$, also $C = y_0 + 3/2$. Wir erhalten insgesamt $\psi(t) = \ln^2(t) + t$ und $\chi(t) = \frac{1}{2}t^2 + 2t\ln t - 2t + y_0 + 3/2$. Das ist die gesuchte Lösung in Parameterform.

Bemerkung zu b): Um eine Lösung $y = y(x)$ zu erhalten, müsste man die Gleichung $\psi = \ln^2(t) + t$ lokal um $t_0 = 1$ nach t auflösen. Das ist zwar möglich (nach dem Satz über implizite Funktionen, denn $\dot\psi(t_0) = 2\frac{\ln t_0}{t_0} + 1 = 1 \neq 0$), aber man kann hier keine explizite Umkehrfunktion angeben.

Aufgabe 13 Wir stellen fest, dass t nicht explizit in der Differentialgleichung vorkommt. Wir behandeln die Differentialgleichung als implizite Differentialgleichung der Form $\Phi(r, r', r'') = 0$ mit $\Phi(x, y, z) = z + \frac{\gamma M}{x^2}$ und verwenden die Methoden aus 1.8 (c) des Vorlesungsskripts.
Der Ansatz $\Phi(\tau, p(\tau), \dot{p}(\tau)p(\tau)) = 0$ führt auf $\dot{p}p = -\frac{\gamma M}{\tau^2}$ für die Funktion p. Wir werden nun p bestimmen und danach $r'(t) = p(r(t))$ lösen.
Die Lösungen der Differentialgleichung für p ergeben sich nach Trennung der Veränderlichen: $\int p\,dp = \int -\frac{\gamma M}{\tau^2}\,d\tau$, d. h. $\frac{p^2}{2} = \frac{\gamma M}{\tau} + C$. Aus $p(r(0)) = r'(0)$ folgt mit den Anfangsbedingungen $p(R) = v_0$, also ist $C = \frac{1}{2}v_0^2 - \gamma M/R$ und damit $p^2(\tau) = 2\gamma M(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{R}) + v_0^2$.
Wir quadrieren $r'(t) = p(r(t))$ und erhalten die Differentialgleichung $(r')^2 = 2\gamma M(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}) + v_0^2$.
Damit der Ball nicht wieder auf die Erde zurückfällt, muss $r(t) \to \infty$ für $t \to \infty$ gelten.
Aus $2\gamma M(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}) + v_0^2 = (r')^2 \geq 0$ folgt in diesem Fall $v_0^2 \geqslant 2\frac{\gamma M}{R}$, also

$$v_0 \geqslant \sqrt{2\frac{\gamma M}{R}} \quad \Big(\approx \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24}}{6{,}37 \cdot 10^6}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} \approx 11,2\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}\Big).$$

Für das kleinste derartige v_0, also für $v_0^2 = 2\gamma M/R$, erhalten wir

$$r' = \sqrt{\frac{2\gamma M}{r}}\,.$$

Dies ist eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen. Ihre Lösungen ergeben sich aus

$$\int \sqrt{\frac{r}{2\gamma M}}\,dr = \int 1\,dt\,, \quad \text{d. h.} \quad \frac{2r^{3/2}}{3\sqrt{2\gamma M}} = t + C\,.$$

Wir erhalten $r(t) = \left[\frac{3}{2}\sqrt{2\gamma M}\big(t + C\big)\right]^{2/3}$, und die Bedingung $r(0) = R$ führt schließlich auf

$$r(t) = \left[\tfrac{3}{2}\sqrt{2\gamma M} \cdot t + R^{3/2}\right]^{2/3}\,.$$

Aufgabe 14 Wir setzen $y = v(x)x^{-1}$, dann folgt $y' = v'x^{-1} - vx^{-2}$, $y'' = v''x^{-1} - 2v'x^{-2} + 2vx^{-3}$. Substituieren wir y, y', y'' in die Gleichung, so erhalten wir $2xv'' - v' = 0$. Durch Separation der Variablen und Auflösung nach v' erhalten wir $v' = Cx^{\frac{1}{2}}$ und daher $v(x) = \frac{2}{3}C_1x^{\frac{3}{2}} + C_2$. Es folgt weiterhin, dass $y = \frac{2}{3}C_1x^{\frac{1}{2}} + C_2x^{-1}$. Der zweite Term ist ein Vielfaches von x^{-1}. Der erste Term ist die zweite linear unabhängige Lösung.