Karlsruher Institut für Technologie (KIT) WS 2012/2013
Institut für Analysis
Priv.Doz. Dr. Peer Kunstmann
Dr. Semjon Wugalter

Höhere Mathematik III für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 4. Übungsblatt

Aufgabe 15

a) Das charakteristische Polynom der Gleichung $y''+4y'-5y=0$, also $\lambda^2+4\lambda-5=(\lambda-1)(\lambda+5)$, besitzt die einfachen Nullstellen 1 und -5. Daher ist e^x, e^{-5x} ein Fundamentalsystem, d.h. $y(x)=c_1e^x+c_2e^{-5x}$, $c_1,c_2\in\mathbb{R}$, ist die allgemeine Lösung von $y''+4y'-5y=0$.

b) Hier lautet das zugehörige charakteristische Polynom $\lambda^2-6\lambda+25$. Dieses hat die einfachen Nullstellen $3\pm4i$. Ein Fundamentalsystem ist gegeben durch $e^{3x}\sin(4x)$, $e^{3x}\cos(4x)$, so dass die allgemeine Lösung von $y''-6y'+25y=0$ durch $y(x)=c_1e^{3x}\sin(4x)+c_2e^{3x}\cos(4x)$, $c_1,c_2\in\mathbb{R}$, gegeben ist.

c) Das charakteristische Polynom von $y'''-y''+y'-y=0$ ist $\lambda^3-\lambda^2+\lambda-1=(\lambda-1)(\lambda^2+1)=(\lambda-1)(\lambda+i)(\lambda-i)$. Da dieses die einfachen Nullstellen $1,-i,i$ besitzt, ist e^x, $\sin x$, $\cos x$ ein zugehöriges Fundamentalsystem. Die allgemeine Lösung von $y'''-y''+y'-y=0$ lautet folglich $y(x)=c_1e^x+c_2\sin x+c_3\cos x$, $c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}$.

d) Das charakteristische Polynom der Differentialgleichung $y''''-y'''+4y''-4y'=0$ lautet $\lambda^4-\lambda^3+4\lambda^2-4\lambda=\lambda(\lambda^3-\lambda^2+4\lambda-4)=\lambda(\lambda-1)(\lambda^2+4)=\lambda(\lambda-1)(\lambda+2i)(\lambda-2i)$ und besitzt die einfachen Nullstellen $0,1,-2i,2i$. Deshalb ist 1, e^x, $\sin(2x)$, $\cos(2x)$ ein Fundamentalsystem und für die allgemeine Lösung von $y''''-y'''+4y''-4y'=0$ ergibt sich $y(x)=c_1+c_2e^x+c_3\sin(2x)+c_4\cos(2x)$, $c_1,c_2,c_3,c_4\in\mathbb{R}$.

e) Hier ist das charakteristische Polynom gleich λ^4+1. Aufgrund von

$$\begin{aligned}\lambda^4=-1 \quad &\iff \quad \lambda^2=i \text{ oder } \lambda^2=-i \quad \iff \quad \lambda^2=e^{i\frac{\pi}{2}} \text{ oder } \lambda^2=e^{-i\frac{\pi}{2}}\\ &\iff \quad \lambda=e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ oder } \lambda=-e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ oder } \lambda=e^{-i\frac{\pi}{4}} \text{ oder } \lambda=-e^{-i\frac{\pi}{4}}\\ &\iff \quad \lambda=\tfrac{1+i}{\sqrt2} \text{ oder } \lambda=\tfrac{-1-i}{\sqrt2} \text{ oder } \lambda=\tfrac{1-i}{\sqrt2} \text{ oder } \lambda=\tfrac{-1+i}{\sqrt2}\end{aligned}$$

sind $\frac{1+i}{\sqrt2}, \frac{1-i}{\sqrt2}, \frac{-1+i}{\sqrt2}, \frac{-1-i}{\sqrt2}$ die (einfachen) Nullstellen des charakteristischen Polynoms. Damit ist $e^{x/\sqrt2}\sin(x/\sqrt2)$, $e^{x/\sqrt2}\cos(x/\sqrt2)$, $e^{-x/\sqrt2}\sin(x/\sqrt2)$, $e^{-x/\sqrt2}\cos(x/\sqrt2)$ ein Fundamentalsystem von $y^{(4)}+y=0$ und die allgemeine Lösung lautet $y(x)=c_1e^{x/\sqrt2}\sin(x/\sqrt2)+c_2e^{x/\sqrt2}\cos(x/\sqrt2)+c_3e^{-x/\sqrt2}\sin(x/\sqrt2)+c_4e^{-x/\sqrt2}\cos(x/\sqrt2)$, $c_1,c_2,c_3,c_4\in\mathbb{R}$.

Aufgabe 16

a) Die homogene Gleichung $y'''-y=0$ besitzt das charakteristische Polynom

$$p(\lambda)=\lambda^3-1=(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda+1)$$

mit den jeweils einfachen Nullstellen $\lambda_1=1$ und $\lambda_{2,3}=-\frac12\pm\frac12\sqrt3\,i$. Somit ist

$$\phi_1(x)=e^{\lambda_1x}=e^x\,, \qquad \phi_2(x)=e^{-x/2}\cos\big(\tfrac12\sqrt3\,x\big)\,, \qquad \phi_3(x)=e^{-x/2}\sin\big(\tfrac12\sqrt3\,x\big)$$

ein zugehöriges Fundamentalsystem, und die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung lautet $y=c_1\phi_1+c_2\phi_2+c_3\phi_3$ mit $c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}$. Da die rechte Seite der inhomogenen Gleichung die Gestalt $q(x)e^{0x}$ hat, wobei q ein Polynom vom Grad 2 ist, und 0 keine Nullstelle von p ist, können wir eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung mit dem entsprechenden Ansatz $y_{\mathrm{p}}(x) = ax^2 + bx + c$ erhalten. Dieser liefert

$$y_{\mathrm{p}}''' - y_{\mathrm{p}} = 0 - (ax^2 + bx + c) \overset{!}{=} 1 + x^2 ,$$

und wir schließen $a = -1$, $b = 0$ und $c = -1$, bekommen also $y_{\mathrm{p}}(x) = -x^2 - 1$. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung lautet somit

$$y(x) = -x^2 - 1 + c_1 e^x + e^{-x/2}\big[c_2 \cos\big(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,x\big) + c_3 \sin\big(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,x\big)\big] \qquad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}) .$$

b) Hier hat das charakteristische Polynom $p(\lambda) = \lambda^2 - 1$ die einfachen Nullstellen 1 und -1, d. h. die homogene Gleichung besitzt die allgemeine Lösung $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Die rechte Seite der inhomogenen Gleichung ist diesmal von der Form $q(x)e^{2x}$ mit einem Polynom q vom Grad 1. Da 2 keine Nullstelle von p ist, machen wir den Ansatz $y_{\mathrm{p}}(x) = (ax + b)e^{2x}$ für eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung. Es gilt dann

$$\begin{aligned} y_{\mathrm{p}}' &= ae^{2x} + 2(ax + b)e^{2x} = (2ax + a + 2b)e^{2x} , \\ y_{\mathrm{p}}'' &= 2ae^{2x} + 2(2ax + a + 2b)e^{2x} = (4ax + 4a + 4b)e^{2x} , \end{aligned}$$

und damit ergibt sich

$$y_{\mathrm{p}}'' - y_{\mathrm{p}} = (4ax + 4a + 4b)e^{2x} - (ax + b)e^{2x} = (3ax + 4a + 3b)e^{2x} \overset{!}{=} xe^{2x} ,$$

was auf $a = \frac{1}{3}$ und $b = -\frac{4}{9}$ führt. Mit $y_{\mathrm{p}}(x) = (\frac{1}{3}x - \frac{4}{9})e^{2x}$ erhält man als allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung schließlich

$$y(x) = (\tfrac{1}{3}x - \tfrac{4}{9})e^{2x} + c_1 e^x + c_2 e^{-x} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}) .$$

c) Die homogene Gleichung haben wir schon in **b)** behandelt. Da die rechte Seite der inhomogenen Gleichung diesmal xe^{1x} lautet und 1 eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms p mit Vielfachheit $\nu = 1$ ist, reicht es hier nicht, einen Ansatz der Form $(ax + b)e^x$ zu machen; vielmehr muss man $y_{\mathrm{p}}(x) = x^\nu(ax + b)e^x = (ax^2 + bx)e^x$ betrachten. Dann ist

$$\begin{aligned} y_{\mathrm{p}}' &= (2ax + b)e^x + (ax^2 + bx)e^x = \big(ax^2 + (2a + b)x + b\big)e^x , \\ y_{\mathrm{p}}'' &= (2ax + 2a + b)e^x + \big(ax^2 + (2a + b)x + b\big)e^x = \big(ax^2 + (4a + b)x + 2a + 2b\big)e^x , \end{aligned}$$

d. h. mit diesem Ansatz hat man

$$y_{\mathrm{p}}'' - y_{\mathrm{p}} = \big(ax^2 + (4a + b)x + 2a + 2b - ax^2 - bx\big)e^x = (4ax + 2a + 2b)e^x \overset{!}{=} xe^x .$$

Koeffizientenvergleich liefert $a = \frac{1}{4}$ und $b = -\frac{1}{4}$. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung lautet also

$$y(x) = \tfrac{1}{4}(x^2 - x)e^x + c_1 e^x + c_2 e^{-x} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}) .$$

Damit ergibt sich $y(0) = c_1 + c_2$ und $y'(x) = \frac{1}{4}(2x - 1)e^x + \frac{1}{4}(x^2 - x)e^x + c_1 e^x - c_2 e^{-x}$, also $y'(0) = -\frac{1}{4} + c_1 - c_2$. Beides soll $= 0$ sein, das bedeutet $c_1 = -c_2 = \frac{1}{8}$. Das Anfangswertproblem hat somit die Lösung

$$y(x) = \tfrac{1}{4}(x^2 - x)e^x + \tfrac{1}{8}e^x - \tfrac{1}{8}e^{-x} = \tfrac{1}{8}(2x^2 - 2x + 1)e^x - \tfrac{1}{8}e^{-x} .$$

d) Das charakteristische Polynom $p(\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 3\lambda = \lambda(\lambda^2 - 4\lambda + 3) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 3)$ hat die einfachen Nullstellen $0, 1$ und 3, d. h. die homogene Gleichung besitzt

$$y(x) = c_1 e^{0x} + c_2 e^x + c_3 e^{3x} \qquad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R})$$

als allgemeine Lösung. Die rechte Seite der inhomogenen Gleichung ist von der Form

$$\big(2\cos(1x) + 4\sin(1x)\big)e^{0x} .$$

Da $0 + 1i$ keine Nullstelle von p ist, können wir als Ansatz für eine Lösung der inhomogenen Gleichung $y_\mathrm{p}(x) = a\cos(1x) + b\sin(1x)$ wählen. Es gilt

$$y_\mathrm{p}' = -a\sin x + b\cos x\,, \qquad y_\mathrm{p}'' = -a\cos x - b\sin x\,, \qquad y_\mathrm{p}''' = a\sin x - b\cos x\,,$$

und damit ergibt sich

$$y_\mathrm{p}''' - 4y_\mathrm{p}'' + 3y_\mathrm{p}' = (a + 4b - 3a)\sin x + (-b + 4a + 3b)\cos x \stackrel{!}{=} 2\cos x + 4\sin x\,.$$

Dies liefert die Gleichungen

$$-2a + 4b = 4 \qquad \text{und} \qquad 4a + 2b = 2\,,$$

also $a = 0$ und $b = 1$. Somit haben wir als spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung $y_\mathrm{p}(x) = \sin x$ und als allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y(x) = \sin x + c_1 + c_2e^x + c_3e^{3x} \qquad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R})\,.$$

Bemerkung: Mit $z := y'$ könnte man auch $z'' - 4z' + 3z = 2\cos x + 4\sin x$ betrachten und die ermittelte Lösung z dann noch integrieren.

Aufgabe 17 **a)** Diese Eulersche Differentialgleichung behandeln wir, indem wir die neue Variable $t = \ln x$ einführen. Die Gleichung wird dann wegen $x = e^t$ zu

$$e^{2t}y''(e^t) + e^ty'(e^t) - y(e^t) = t\,.$$

Mit $u(t) := y(e^t)$ haben wir $u'(t) = e^ty'(e^t)$ und $u''(t) = e^ty'(e^t) + e^{2t}y''(e^t)$. Unsere Gleichung lautet somit

$$u''(t) - u(t) = t\,.$$

Dies ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Da das charakteristische Polynom $p(\lambda) = \lambda^2 - 1$ die einfachen Nullstellen 1 und -1 hat, ist die allgemeine Lösung von $u'' - u = 0$ gegeben durch $u(t) = c_1e^t + c_2e^{-t}$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Da die Inhomogenität $te^{0\cdot t}$ ein Polynom vom Grad 1 und 0 keine Nullstelle von p ist, gewinnen wir eine spezielle Lösung u_p der inhomogenen Gleichung, indem wir dafür ein Polynom vom Grad 1 als Ansatz nehmen, etwa $u_\mathrm{p}(t) = at + b$. Dann ist $u_\mathrm{p}'' - u_\mathrm{p} = -u_\mathrm{p} = -at - b$. Eine Lösung ergibt sich also für $a = -1$ und $b = 0$, d. h. es ist $u_\mathrm{p}(t) = -t$. Als allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung haben wir folglich

$$u(t) = -t + c_1e^t + c_2e^{-t} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})\,,$$

und durch Rücksubstitution erhalten wir

$$y(x) = u(\ln x) = -\ln x + c_1x + c_2x^{-1} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})\,.$$

Es gilt $y'(x) = -x^{-1} + c_1 - c_2x^{-2}$. Die Bedingungen $y(1) = 2$ und $y'(1) = -1$ bedeuten $c_1 + c_2 = 2$ und $-1 + c_1 - c_2 = -1$, also $c_1 = c_2 = 1$. Die Lösung des Anfangswertproblems ist somit

$$y(x) = -\ln x + x + x^{-1}\,.$$

b) Wir multiplizieren mit x^2 und bekommen die Eulersche Differentialgleichung

$$x^4y^{(4)} + 5x^3y''' + x^2y'' + 2xy' - 2y = 0\,.$$

Dann substituieren wir wieder $x = e^t$ und erhalten für $u(t) := y(e^t)$

$$u'(t) = e^t y'(e^t) = xy'(x)\,, \qquad u''(t) = e^t y'(e^t) + (e^t)^2 y''(e^t) = xy'(x) + x^2 y''(x)\,,$$

was insbesondere $x^2 y'' = u'' - xy' = u'' - u'$ liefert. Weiter hat man

$$u'''(t) = e^t y'(e^t) + 3(e^t)^2 y''(e^t) + (e^t)^3 y'''(e^t) = xy'(x) + 3x^2 y''(x) + x^3 y'''(x)\,,$$

also $x^3 y''' = u''' - 3(u'' - u') - u' = u''' - 3u'' + 2u'$. Schließlich gilt noch

$$u^{(4)}(t) = e^t y'(e^t) + 7(e^t)^2 y''(e^t) + 6(e^t)^3 y'''(e^t) + (e^t)^4 y^{(4)}(e^t)\,,$$

also $x^4 y^{(4)} = u^{(4)} - 6(u''' - 3u'' + 2u') - 7(u'' - u') - u' = u^{(4)} - 6u''' + 11u'' - 6u'$. Insgesamt kommen wir zu der Differentialgleichung

$$(u^{(4)} - 6u''' + 11u'' - 6u') + 5(u''' - 3u'' + 2u') + (u'' - u') + 2u' - 2u = 0\,,$$

also zu $u^{(4)} - u''' - 3u'' + 5u' - 2u = 0$. Für das zugehörige charakteristische Polynom $p(\lambda) = \lambda^4 - \lambda^3 - 3\lambda^2 + 5\lambda - 2$ erraten wir die Nullstelle $\lambda = -2$; Polynomdivision liefert $p(\lambda) = (\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1)(\lambda + 2) = (\lambda - 1)^3(\lambda + 2)$. Die allgemeine Lösung lautet also

$$u(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 t^2 e^t + c_4 e^{-2t} \qquad (c_k \in \mathbb{R})\,,$$

und Rücksubstitution führt dann auf

$$y(x) = u(\ln x) = c_1 x + c_2 x \ln x + c_3 x (\ln x)^2 + c_4 x^{-2} \qquad (c_k \in \mathbb{R})\,.$$

Aufgabe 18 **a)** Wir machen einen Potenzreihenansatz; es gilt also

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k\,, \qquad y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1}$$

für (zu bestimmende) Koeffizienten $c_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}_0$. Eingesetzt in die linke Seite der Differentialgleichung ergibt sich

$$\begin{aligned} y' + xy &= \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_{n+1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^n \\ &= (0+1) c_{0+1} x^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \Big((n+1) c_{n+1} + c_{n-1} \Big) x^n\,. \end{aligned}$$

Auf der rechten Seite der Differentialgleichung steht 0, so dass ein Koeffizientenvergleich

$$c_1 = 0 \qquad \text{und} \qquad c_{n+1} = -\frac{c_{n-1}}{n+1} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

liefert. Es gilt $c_3 = c_{2+1} = -\frac{c_{2-1}}{2+1} = 0$, und damit auch $c_5 = c_7 = c_9 = \cdots = 0$.
Da kein Anfangswert vorgegeben ist, gibt es keine Bedingung an c_0, so dass $c_0 \in \mathbb{R}$ frei wählbar ist.
Aus der Rekursionsvorschrift ergeben sich dann die Werte

$$c_2 = \frac{-c_0}{2}\,, \qquad c_4 = -\frac{c_2}{4} = \frac{c_0}{2 \cdot 4}\,, \qquad c_6 = -\frac{c_4}{6} = \frac{-c_0}{2 \cdot 4 \cdot 6}\,, \qquad c_8 = -\frac{c_6}{8} = \frac{c_0}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}\,,$$

und damit kommen wir zu der Vermutung

$$c_{2n} = \frac{(-1)^n c_0}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n)} \qquad (n \in \mathbb{N})\,,$$

die wir induktiv beweisen. Der Induktionsanfang ist schon gemacht; es fehlt noch der Induktionsschluss: Sei $n \in \mathbb{N}$. Es gelte $c_{2n} = \frac{(-1)^n c_0}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)}$ (IV). Dann folgt mit der Rekursionsformel

$$c_{2(n+1)} = c_{(2n+1)+1} = -\frac{c_{2n}}{(2n+2)} \overset{\text{IV}}{=} \frac{(-1)^{n+1}c_0}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)\cdot(2n+2)}\,.$$

Nun kennen wir alle Koeffizienten in der Potenzreihenentwicklung von y. Die allgemeine Lösung von $y' + xy = 0$ lautet

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n}x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1}x^{2n+1} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n c_0}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)}\,x^{2n} + 0 \\ &= c_0\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\cdot 2^n}\,x^{2n}\right) = c_0\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-x^2/2)^n}{n!}\right) = c_0\,e^{-x^2/2}\,, \qquad c_0 \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

b) Wieder machen wir einen Potenzreihenansatz; es gilt also

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k\,, \qquad y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1}\,, \qquad y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2}\,.$$

(Wegen der Anfangsbedingungen kennen wir schon die Koeffizienten $c_0 = y(0) = 0$ und $c_1 = y'(0) = 1$.) Eingesetzt in die linke Seite der Differentialgleichung ergibt sich

$$\begin{aligned} 2y'' - xy' + 2y &= 2\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2} - x\sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} + 2\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} 2(k+2)(k+1)c_{k+2}x^k - \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} 2c_k x^k \\ &= 2(0+2)(0+1)c_{0+2} + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(2(k+2)(k+1)c_{k+2} - kc_k + 2c_k\Big)x^k + 2c_0 \\ &= 2c_0 + 4c_2 + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(2(k+2)(k+1)c_{k+2} - (k-2)c_k\Big)x^k\,. \end{aligned}$$

Auf der rechten Seite der Differentialgleichung steht

$$4 - x\cos x = 4 - x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\,x^{2n} = 4 + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}\,x^{2n+1}\,.$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert also zum einen

$$2c_0 + 4c_2 = 4\,,$$

woraus wegen $c_0 = 0$ unmittelbar $c_2 = 1$ folgt, zum anderen

$$2(k+2)(k+1)c_{k+2} - (k-2)c_k = \begin{cases} 0\,, & k = 2n \quad (n \geqslant 1)\,, \\ (-1)^{n+1}/(2n)!\,, & k = 2n+1 \quad (n \geqslant 0)\,. \end{cases}$$

Aus der ersten Zeile hiervon ergibt sich die Rekursionsvorschrift

$$c_{2n+2} = \frac{(2n-2)c_{2n}}{2(2n+2)(2n+1)} \qquad (n \geqslant 1)\,.$$

Für $n = 1$ folgt $c_4 = 0$, und damit auch $c_6 = c_8 = \cdots = 0$. Die zweite Zeile liefert

$$c_{2n+3} = \frac{(2n-1)c_{2n+1} + (-1)^{n+1}/(2n)!}{2(2n+3)(2n+2)} \qquad (n \geqslant 0)\,.$$

Wegen $c_1 = 1$ ergeben sich dann die Werte

$$c_3 = \frac{-c_1 - 1}{12} = -\frac{1}{6} = -\frac{1}{3!}\,, \qquad c_5 = \frac{c_3 + 1/2}{40} = \frac{1/3}{40} = \frac{1}{120} = \frac{1}{5!}\,,$$

und damit kommen wir zu der Vermutung

$$c_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \qquad (n \geqslant 0)\,,$$

die wir induktiv beweisen. Der Induktionsanfang ist schon gemacht; es fehlt noch der Induktionsschluss: Gilt die Formel $c_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$ (IV) für ein $n \geqslant 0$, so folgt

$$\begin{aligned} c_{2(n+1)+1} = c_{2n+3} &= \frac{(2n-1)c_{2n+1} + (-1)^{n+1}/(2n)!}{2(2n+3)(2n+2)} \\ &\overset{\text{IV}}{=} \frac{(2n-1)(-1)^n}{2(2n+3)(2n+2)(2n+1)!} + \frac{(-1)^{n+1}}{2(2n+3)(2n+2)(2n)!} \\ &= \frac{(-1)^{n+1}(-2n+1)}{2(2n+3)!} + \frac{(-1)^{n+1}(2n+1)}{2(2n+3)!} = \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)!} = \frac{(-1)^{n+1}}{(2(n+1)+1)!}\,. \end{aligned}$$

Wir fassen die gefundenen Ergebnisse zusammen:

$$c_0 = 0\,, \quad c_2 = 1\,, \quad c_{2n} = 0 \quad (n \geqslant 2)\,, \qquad c_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \quad (n \geqslant 0)\,.$$

Damit haben wir die Lösung des Anfangswertproblems ermittelt:

$$y(x) = x^2 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, x^{2n+1} = x^2 + \sin x\,.$$