Karlsruher Institut für Technologie (KIT) WS 2012/2013
Institut für Analysis
Priv.Doz. Dr. Peer Kunstmann
Dr. Semjon Wugalter

Höhere Mathematik III für die Fachrichtungen
Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 5. Übungsblatt

Aufgabe 19 **a)** Die Funktion $F(x, y) := -\frac{x}{y}$ ist in x stetig und nach y stetig partiell differenzierbar im Punkt $(0; 1)$. Nach dem Satz von Picard-Lindelöf hat die Gleichung eine eindeutige Lösung auf einem offenen Intervall $]a, b[$, $0 \in]a, b[$.

b) Für $y \neq 0$ gilt

$$y\,dy = -x\,dx \iff y^2 = -x^2 + C \iff y = \mp\sqrt{C - x^2}.$$

Aus der Anfangsbedingung folgt, dass $C = 1$ und $y = \sqrt{1 - x^2}$. Diese Lösung ist auf dem maximalen Intervall $]-1, 1[$ definiert.

Aufgabe 20 **a)** Hier ist $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto xy$. Definitionsgemäß gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
y_0(x) &= 1\,,\\
y_1(x) &= 1 + \int_0^x t y_0(t)\,dt = 1 + \int_0^x t\,dt = 1 + \tfrac{1}{2}\,x^2\,,\\
y_2(x) &= 1 + \int_0^x t y_1(t)\,dt = 1 + \int_0^x t(1 + \tfrac{1}{2}\,t^2)\,dt = 1 + \tfrac{1}{2}\,x^2 + \tfrac{1}{2\cdot 4}\,x^4 = 1 + \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{1}{2}(\tfrac{x^2}{2})^2\,.
\end{aligned}$$

Damit kommen wir zu der Vermutung

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(\frac{x^2}{2}\right)^k \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0\,,$$

welche wir per Induktion beweisen. Der Induktionsanfang ist schon gemacht; es fehlt noch der Induktionsschluss: Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Gilt die Formel für dieses n, so folgt

$$\begin{aligned}
y_{n+1}(x) &= 1 + \int_0^x t y_n(t)\,dt \overset{\text{IV}}{=} 1 + \int_0^x t \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\,\frac{t^{2k}}{2^k}\,dt = 1 + \sum_{k=0}^{n} \int_0^x \frac{1}{k!}\,\frac{t^{2k+1}}{2^k}\,dt\\
&= 1 + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\,\frac{x^{2k+2}}{(2k+2)\,2^k} = 1 + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)!}\left(\frac{x^2}{2}\right)^{k+1} = \sum_{j=0}^{n+1} \frac{1}{j!}\left(\frac{x^2}{2}\right)^j.
\end{aligned}$$

Nach Definition der Exponentialfunktion ergibt sich für die Grenzfunktion

$$y(x) := \lim_{n\to\infty} y_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{x^2}{2}\right)^k = e^{x^2/2} \qquad \text{für jedes } x \in \mathbb{R}\,.$$

Wegen $\partial_y f(x, y) = \partial_y[xy] = x$ ist f bezüglich der Variablen y in $I \times \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar. Somit folgt aus dem Fixpunktiterationsverfahren des Satzes von Picard-Lindelöf, dass y tatsächlich eine Lösung des Anfangswertproblems ist. (Direktes Nachrechnen wäre natürlich auch möglich.)

b) Hier ist $f\colon (-\frac{1}{2},\frac{1}{2})\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}, (x,y)\mapsto x^2+xy^2$. Für jedes $x\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ gilt

$$\begin{aligned}
y_0(x) &= 0\,,\\
y_1(x) &= 0+\int_0^x t^2+0\,dt = \tfrac{1}{3}\,x^3\,,\\
y_2(x) &= \int_0^x t^2+t\big(\tfrac{1}{3}\,t^3\big)^2\,dt = \tfrac{1}{3}\,x^3+\tfrac{1}{8\cdot 9}\,x^8\,,\\
y_3(x) &= \int_0^x t^2+t\big(\tfrac{1}{3}\,t^3+\tfrac{1}{8\cdot 9}\,t^8\big)^2\,dt = \tfrac{1}{3}\,x^3+\int_0^x t\big(\tfrac{1}{9}\,t^6+\tfrac{2}{3\cdot 8\cdot 9}\,t^{11}+\tfrac{1}{(8\cdot 9)^2}\,t^{16}\big)\,dt\\
&= \tfrac{1}{3}\,x^3+\tfrac{1}{8\cdot 9}\,x^8+\tfrac{2}{3\cdot 8\cdot 9\cdot 13}\,x^{13}+\tfrac{1}{(8\cdot 9)^2\cdot 18}\,x^{18}\,.
\end{aligned}$$

Dass $y(x):=\lim_{n\to\infty}y_n(x)$ existiert und das Anfangswertproblem löst, folgt aus dem Satz von Picard-Lindelöf, denn f ist stetig partiell nach y differenzierbar: $\partial_y f(x,y)=\partial_y[x^2+xy^2]=2xy$.

c) i) Die Funktion f ist auf $(-1,1)\times(-1,1)$ stetig, denn sie ist in den einzelnen Teilbereichen stetig und die Definitionen stimmen an den gemeinsamen Rändern überein.

ii) Für jedes $x\in(-1,1)$ gilt

$$\begin{aligned}
y_0(x) &= 0\,,\\
y_1(x) &= 0+\int_0^x f(t,0)\,dt = \int_0^x 2t-0\,dt = x^2\,,\\
y_2(x) &= \int_0^x f(t,t^2)\,dt = \int_0^x 2t-4\tfrac{t^2}{t}\,dt = -x^2\,,\\
y_3(x) &= \int_0^x f(t,-t^2)\,dt = \int_0^x 2t\,dt = x^2\,.
\end{aligned}$$

Wir brauchen nicht weiterrechnen und sehen, dass $y_n(x)=x^2$ für ungerade n und $y_n(x)=-x^2$ für gerade $n\geqslant 2$ gilt. Definiere also $z_1(x):=x^2$ sowie $z_2(x):=-x^2$.

iii) Wegen

$$z_1'(x)=2x\neq-2x=2x-4\tfrac{x^2}{x}=f(x,z_1(x)) \qquad\text{und}\qquad z_2'(x)=-2x\neq 2x=f(x,z_2(x))$$

sind weder z_1 noch z_2 Lösungen des Anfangswertproblems. Da f stetig ist, existiert aber nach dem Satz von Peano eine Lösung des Anfangswertproblems.

Insbesondere sieht man, dass f nicht stetig partiell nach y differenzierbar ist, denn sonst müsste die Folge (y_n) nach dem Satz von Picard-Lindelöf für $n\to\infty$ gegen die (eindeutige) Lösung des Anfangswertproblems in einer Umgebung von 0 konvergieren.

Aufgabe 21 **a)** Die Funktion f ist stetig in x (was gar nicht explizit auftaucht) und y, also stetig auf $\mathbb{R}^2$. Nach dem Existenzsatz von Peano hat das Anfangswertproblem (mindestens) eine Lösung.

b) Falls y eine Lösung der Differentialgleichung ist, so gilt $y'(x)=f(y(x))\geqslant 0$, denn f nimmt nur nicht-negative Werte an. Daher ist y monoton wachsend.

i) Es sei y eine Lösung von $y'=f(y)$ und es gelte $|y(x)|>1$.
Idee: y löst auch die modifizierte Differentialgleichung

$$y'=\widetilde{f}(y) \quad \text{mit } \tilde{f}(y):=y^2. \tag{1}$$

Dies ist wahr, denn $f(y)=\widetilde{f}(y)$ für alle y mit $|y|>1$, und wir haben zusätzlich vorausgesetzt, dass $|y(x)|>1$ für alle $x\in I$ gilt. Da $\widetilde{f}$ (im Gegensatz zu f) stetig partiell nach y differenzierbar ist, ist die Lösung von $y'=\widetilde{f}(y)$ zusammen mit einem gegebenen Anfangswert $y(x_0)=y_0$ nach dem Satz von Picard-Lindelöf eindeutig. Unsere Überlegung zeigt, dass die Funktionswerte von y eindeutig durch die folgenden drei Eigenschaften festgelegt sind:

a) y löst die ursprüngliche Differentialgleichung $y = f(y)$;

b) y erfüllt eine Anfangswertbedingung, etwa $y(x_0) = y_0$ für gewisse x_0, $y_0 \in \mathbb{R}$;

c) es gilt $|y(x)| > 1$ für alle $x \in I$.

Beispielsweise durch Trennung der Variablen sehen wir, dass die Lösung von (1) zusammen mit dem Anfangswert $y(x_0) = y_0$ folgendermaßen lautet: $y(x) = 0$, falls $y_0 = 0$, bzw. im Fall $y_0 \neq 0$

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{d\eta}{\eta^2} = \int_{x_0}^{x} dx \quad \Longleftrightarrow \quad -\frac{1}{y(x)} + \frac{1}{y_0} = x - x_0 \quad \Longleftrightarrow \quad y(x) = -(x - x_0 - \frac{1}{y_0})^{-1}.$$

ii) Wir notieren den Anfangswert $y_0 := y(x_0)$ und wenden dieselbe Idee wie bei i) an. Ist y eine Lösung von $y' = f(y)$ und gilt $0 < y(x) \leqslant 1$ für alle $x \in I$, dann ist y eine Lösung der modifizierten Differentialgleichung

$$y' = \widetilde{f}(y) \qquad \text{mit } \widetilde{f}(y) := \begin{cases} \sqrt{y} & , y \geqslant y_0, \\ \frac{1}{2\sqrt{y_0}}(y - y_0) + \sqrt{y_0} & , y < y_0. \end{cases}$$

Man beachte, dass y ja monoton wachsend ist und somit nur die erste Zeile in der Definition von $\widetilde{f}$ zum Tragen kommt. Das wichtige an der zweiten Zeile ist dann nur, dass $\widetilde{f}$ zu einer stetig differenzierbaren Funktion wird. Wieder garantiert der Satz von Picard-Lindelöf (angewandt auf die modifizierte Differentialgleichung $y' = \widetilde{f}(y)$), dass y eindeutig festgelegt ist durch:

y löst die ursprüngliche Differentialgleichung $y' = f(y)$, $\quad y(x_0) = y_0$, $\quad 0 < y(x) \leqslant 1$.

Und wieder bestimmen wir y mit Trennung der Variablen (vgl. auch Bsp. 2) in 1.2)

$$y(x) = \frac{(x - C)^2}{4}.$$

Dann ist $y'(x) = \frac{(x-C)}{2}$. Da $y(x) > 0$ und $y'(x) \geqslant 0$ für alle $x \in I$ gelten soll, fordern wir $C < x_0$.

Nun bestimmen wir die maximalen Lösungen des ursprünglichen Problems:

Es ist klar, dass $y \equiv 0$ eine triviale Lösung von $y' = f(y)$, $y(0) = 0$ ist.

Sei $a \in (0, \infty)$ und $y : [0, a) \to \mathbb{R}$ eine maximale, nicht fortsetzbare Lösung. Wir setzen

$$c := \sup\{x \geqslant 0 : \; y(x) = 0\}$$

und

$$d := \sup\{x \geqslant c : \; y(x) \leqslant 1\}.$$

Aus der Vorlesung wissen wir, dass $|y(x)| \to \infty$ für $x \to a-$ gilt ("Blow-up"). Daher ergibt sich $0 \leqslant c < d < a$. Aufgrund der Monotonie von y wissen wir, dass y eingeschränkt auf $(c, d]$ eine Lösung wie in Teil ii) und auf $[d, a)$ eine Lösung wie in Teil i) ist. Da bei a der Blow-up stattfinden muss, gilt $y(x) = -(x-a)^{-1}$ für alle $x \in [d, a)$. Wegen $-(x-a)^{-1} > 1 \iff x > a-1$ folgt zunächst

$$d = a - 1.$$

Da y als Lösung insbesondere stetig ist, muss $y(d) = \frac{(d-C)^2}{4} \stackrel{!}{=} -(d-a)^{-1} = 1$ gelten; somit führt Einsetzen von $d = a - 1$ und Umstellen nach C auf

$$C = a - 3.$$

Also ist $y(x) = \frac{(x-(a-3))^2}{4}$ für alle $x \in (c, d] = (c, a-1]$, was auf $c = a - 3$ führt. Die Forderung $c \geqslant 0$ ergibt schließlich $a \geqslant 3$.

Fazit: Es gilt $a \geqslant 3$ und $y \colon [0, a) \to \mathbb{R}$ ist von der Form

$$y(x) = \begin{cases} 0 & , x \leqslant a - 3, \\ \frac{(x-(a-3))^2}{4} & , x \in (a - 3, a - 1], \\ -(x - a)^{-1} & , x \in (a - 1, a). \end{cases}$$

Umgekehrt kann man leicht prüfen, dass dieses y auch tatsächlich eine maximale Lösung des Anfangswertproblems $y' = f(y)$, $y(0) = 0$ ist. Zusammen mit der trivialen Lösung $y(x) = 0$, $x \in [0, \infty)$, haben wir alle maximalen Lösungen bestimmt.