

Höhere Mathematik III für die Fachrichtungen
Elektrotechnik und Informationstechnik

5. Übungsblatt

Aufgabe 19

Für das Anfangswertproblem

$$y' = -\frac{x}{y}, \quad y(0) = 1$$

- begründen Sie die Existenz und die Eindeutigkeit der Lösung auf einem Intervall $]a, b[$, $0 \in]a, b[$;
- finden Sie die maximale Lösung und das maximale Existenzintervall.

Aufgabe 20

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, I ein offenes Intervall, das a enthält, und $f: I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Ferner sei das Anfangswertproblem

$$y' = f(x, y), \quad y(a) = b$$

gegeben. Wir wollen eine Lösung iterativ bestimmen und definieren dazu die Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ von Funktionen $I \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$y_0(x) := b, \quad y_{n+1}(x) := b + \int_a^x f(t, y_n(t)) dt \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0, x \in I.$$

- Es sei $I = \mathbb{R}$ und das Anfangswertproblem gegeben durch

$$y' = xy, \quad y(0) = 1.$$

Bestimmen Sie $(y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ sowie die Grenzfunktion $y(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x)$ ($x \in I$). Wie lautet die Lösung des Anfangswertproblems?

- Es sei $I = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ und das Anfangswertproblem gegeben durch

$$y' = x^2 + xy^2, \quad y(0) = 0.$$

Berechnen Sie y_n für $n = 0, 1, 2, 3$. Begründen Sie, dass $y(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x)$ ($x \in I$) existiert und eine Lösung des Anfangswertproblems ist.

- Es sei $I = (-1, 1)$ und das Anfangswertproblem gegeben durch

$$y' = f(x, y), \quad y(0) = 0,$$

wobei

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & , x = 0, |y| < 1, \\ 2x & , 0 < |x| < 1, -1 < y < 0, \\ 2x - 4\frac{y}{x} & , 0 < |x| < 1, 0 \leq y \leq x^2, \\ -2x & , 0 < |x| < 1, x^2 < y < 1. \end{cases}$$

- i) Vergewissern Sie sich, dass f auf $(-1, 1) \times (-1, 1)$ stetig ist.
- ii) Zeigen Sie, dass es zwei Funktionen z_1, z_2 so gibt, dass $y_n = z_1$ für ungerade n und $y_n = z_2$ für gerade $n \geq 2$ gilt.
- iii) Sind z_1 und z_2 Lösungen des Anfangswertproblems?

Aufgabe 21

Aus der Vorlesung wissen wir, dass ein Anfangswertproblem $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ mit stetiger Funktion f immer eine Lösung besitzt (Existenzsatz von Peano). In dieser Aufgabe werden wir sehen, dass die Lösung nicht eindeutig zu sein braucht und dass auch maximale Lösungen verschiedene Existenzintervalle haben können.

Wir betrachten die Differentialgleichung $y' = f(y)$ mit

$$f(y) = \begin{cases} \sqrt{|y|} & , |y| \leq 1, \\ y^2 & , |y| > 1 \end{cases}$$

und dem Anfangswert $y(0) = 0$.

- a) Begründen Sie, dass dieses Anfangswertproblem (mindestens) eine Lösung besitzt.
- b) Finden Sie alle Lösungen des Anfangswertproblems $y' = f(y)$, $y(0) = 0$.

Anleitung: Zeigen Sie, dass jede Lösung monoton wachsend ist.

Es sei $I = [x_0, x_0 + \delta)$ ein Intervall und $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung $y' = f(y)$ mit dem Anfangswert $y(x_0) = y_0$. Wie lautet y ,

- i) falls $|y(x)| > 1$ für alle $x \in I$ gilt?
- ii) falls $0 < y(x) \leq 1$ für alle $x \in I$ gilt?

Bauen Sie nun aus diesen beiden Lösungen und einer dritten trivialen Lösung die maximalen Lösungen $y : [0, a) \rightarrow \mathbb{R}$ des ursprünglichen Anfangswertproblems zusammen.