Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.Doz. Dr. Peer Kunstmann
Dr. Semjon Wugalter

WS 2012/2013

Höhere Mathematik III für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 6. Übungsblatt

Aufgabe 22 **a)** Das System kann man äquivalent umschreiben zu

$$\begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \\ w'(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}. \tag{$*$}$$

Wir bestimmen zunächst das charakteristische Polynom von A mit Hilfe der Regel von Sarrus

$$\begin{aligned}\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 3-\lambda & -1 \\ 3 & 3 & -1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (3-\lambda)^2(-1-\lambda) - 3 - 3 - 3(3-\lambda)(-1) - 3(-1)(3-\lambda) - (-1-\lambda) \\ &= -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4 \\ &= -(\lambda-1)(\lambda-2)^2.\end{aligned}$$

Also sind 1 und 2 die Eigenwerte von A (mit der algebraischen Vielfachheit 1 bzw. 2).
Nun bestimmen wir die zugehörigen Eigenräume. Der Eigenraum zum Eigenwert 1 lautet

$$\mathrm{Kern}(A - I) = \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \mathrm{lin}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \}.$$

Für den Eigenraum zum Eigenwert 2 ergibt sich

$$\mathrm{Kern}(A - 2I) = \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} = \mathrm{lin}\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}.$$

Damit erhalten wir ein Fundamentalsystem von $(*)$

$$e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

so dass die allgemeine Lösung von $(*)$ durch

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & e^{2t} \\ e^t & e^{2t} & 0 \\ 3e^t & e^{2t} & e^{2t} \end{pmatrix} \vec{c}, \qquad \vec{c} = (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3,$$

gegeben ist.

b) Wir bezeichnen die Matrix des gegebenen Systems jeweils mit A.

i) Für das charakteristische Polynom ergibt sich hier

$$\det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & -2 \\ 3 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$
$$= (1-\lambda)\big((1-\lambda)^2+4\big) = (1-\lambda)(\lambda^2-2\lambda+5)\,.$$

Die Eigenwerte von A sind also $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_{2,3} = 1 \pm 2i$. Zum reellen Eigenwert $\lambda_1 = 1$ gehört der Eigenraum

$$\mathrm{Kern}(A-\lambda_1 I) = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{lin}\{\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}\}\,,$$

und damit erhalten wir als eine Lösung des Systems $\vec{y}\,' = A\vec{y}$ die Funktion

$$\vec{\phi}_1(t) = e^t\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}\,.$$

Zum nicht-reellen Eigenwert $\lambda_2 = 1+2i$ gehört der Eigenraum

$$\mathrm{Kern}\big(A-(1+2i)I\big) = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} -2i & 0 & 0 \\ 2 & -2i & -2 \\ 3 & 2 & -2i \end{pmatrix} = \mathrm{lin}\{\begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}\}\,,$$

so dass eine komplexe Lösung des Differentialgleichungssystems $\vec{y}\,' = A\vec{y}$ gegeben ist durch

$$e^{(1+2i)t}\begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} = e^t\big(\cos(2t)+i\sin(2t)\big)\begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} = e^t\begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix} + ie^t\begin{pmatrix} 0 \\ \cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}\,.$$

Die Aufteilung in Real- und Imaginärteil liefert dann die zwei reellen Lösungen

$$\vec{\phi}_2(t) = e^t\begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{\phi}_3(t) = e^t\begin{pmatrix} 0 \\ \cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}\,,$$

und ein Fundamentalsystem von $\vec{y}\,' = A\vec{y}$ ist bestimmt, nämlich $\vec{\phi}_1, \vec{\phi}_2, \vec{\phi}_3$. Die allgemeine Lösung des Systems $\vec{y}\,' = A\vec{y}$ lautet somit $\vec{y} = c_1\vec{\phi}_1 + c_2\vec{\phi}_2 + c_3\vec{\phi}_3$ mit $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

ii) Das charakteristische Polynom ist diesmal

$$\det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2-\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix}\,.$$

Um diese Determinante zu berechnen, addieren wir zunächst die dritte zur vierten Zeile, subtrahieren dann die zweite von der vierten Spalte und entwickeln anschließend nach der ersten Zeile

$$\det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -1-\lambda & -\lambda \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1+\lambda \\ -1 & 1 & -2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda & -\lambda \end{pmatrix}$$
$$= -\lambda\det\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1+\lambda \\ 1 & -2-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda & -\lambda \end{pmatrix} + (-1)^{1+3}\cdot 1\cdot\det\begin{pmatrix} 0 & -\lambda & 1+\lambda \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$
$$= -\lambda\big(\lambda^2(-2-\lambda)-(1+\lambda)^2\big)+\lambda^2 = \lambda\big(\lambda^3+3\lambda^2+3\lambda+1\big) = \lambda(\lambda+1)^3\,.$$

Zum Eigenwert $\lambda = 0$ gehört der Eigenraum

$$\text{Kern}(A - 0I) = \text{Kern}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \text{lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\},$$

und dies liefert als erste Fundamentallösung des gegebenen Systems

$$\vec{\phi}_1(t) = e^{0t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zum Eigenwert $\lambda = -1$ erhält man den Eigenraum

$$\text{Kern}(A + I) = \text{Kern}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \text{lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\},$$

der eindimensional ist und uns daher nur eine weitere Lösung gibt, nämlich

$$\vec{\phi}_2(t) = e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir ergänzen den einen gefundenen Eigenvektor zu einer Basis von

$$\text{Kern}(A + I)^2 = \text{Kern}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\},$$

und erhalten als dritte Lösung die Funktion

$$\vec{\phi}_3(t) = e^{-t}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t(A+I)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + te^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Immer noch fehlt uns eine Lösung für das Fundamentalsystem, daher betrachten wir

$$\text{Kern}(A + I)^3 = \text{Kern}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}.$$

Eine vierte und letzte Fundamentallösung ist somit

$$\vec{\phi}_4(t) = e^{-t}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t(A+I)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2}t^2(A+I)^2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right),$$

konkret ausgerechnet also

$$\vec{\phi}_4(t) = e^{-t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + te^{-t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2}t^2e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Fazit: Ein Fundamentalsystem von $\vec{y}' = A\vec{y}$ ist durch $\vec{\phi}_1, \vec{\phi}_2, \vec{\phi}_3, \vec{\phi}_4$ gegeben.

Aufgabe 23 Zunächst ermitteln wir ein Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen Gleichung $\vec{y}' = A\vec{y}$. Offensichtlich sind $1, 3$ die Eigenwerte von A. Wegen

$$\text{Kern}(A - I) = \text{Kern}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \text{lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$$

ergibt sich eine erste Fundamentallösung

$$\vec{\phi}_1(t) = e^{1t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wegen

$$\text{Kern}(A - 3I) = \text{Kern}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{lin}\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$$

ist durch

$$\vec{\phi}_2(t) = e^{3t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{3t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine zweite Fundamentallösung gegeben. Weiter gilt

$$(A - 3I)^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Infolgedessen lässt sich $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ durch (z.B.) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ zu einer Basis von $\text{Kern}(A - 3I)^2$ ergänzen. Dies liefert gemäß Vorlesung als eine weitere Fundamentallösung

$$\vec{\phi}_3(t) = e^{3t}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t(A - 3I)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = e^{3t}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ te^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir als ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung $\vec{y}' = A\vec{y}$

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \vec{\phi}_1(t) & \vec{\phi}_2(t) & \vec{\phi}_3(t) \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{3t} & te^{3t} \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Eine spezielle Lösung $\vec{y}_p$ der inhomogenen Gleichung $\vec{y}' = A\vec{y} + \vec{b}(t)$ lässt sich durch Variation der Konstanten bestimmen (vgl. S. 31, Skript). Danach ist $\vec{y}_p$ gegeben durch

$$\vec{y}_p(t) = \Phi(t)\int \Phi^{-1}(t)\vec{b}(t)\, dt.$$

Die zu invertierende Matrix $\Phi(t)$ ist eine Blockmatrix der Form $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ mit den regulären Matrizen $A = \begin{pmatrix} e^t \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} e^{3t} & te^{3t} \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix}$. Die Inverse von solchen Matrizen kann man durch $\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$ berechen. Mit der bekannten Formel für die Inversion einer 2×2-Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \qquad (a, b, c, d \in \mathbb{C} \text{ mit } ad - bc \neq 0) \tag{1}$$

erhält man $B^{-1} = \frac{1}{e^{6t}} \begin{pmatrix} e^{3t} & -te^{3t} \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-3t} & -te^{-3t} \\ 0 & e^{-3t} \end{pmatrix}$. Dies führt dann auf

$$\Phi(t)^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-3t} & -te^{-3t} \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{pmatrix},$$

woraus

$$\int \Phi(t)^{-1}\vec{b}(t)\,dt = \int \begin{pmatrix} te^{-t} \\ 3te^{-3t} - t \\ 1 \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} \int te^{-t}\,dt \\ \int 3te^{-3t} - t\,dt \\ \int 1\,dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -te^{-t} - e^{-t} \\ -te^{-3t} - \frac{1}{3}e^{-3t} - \frac{1}{2}t^2 \\ t \end{pmatrix}$$

folgt. Dies ergibt schließlich

$$\vec{y}_p(t) = \Phi(t) \int \Phi^{-1}(t)\vec{b}(t)\,dt = -\begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{3t} & te^{3t} \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} te^{-t} + e^{-t} \\ te^{-3t} + \frac{1}{3}e^{-3t} + \frac{1}{2}t^2 \\ -t \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} t+1 \\ t + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}t^2e^{3t} \\ -te^{3t} \end{pmatrix}.$$

Damit lautet die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$\begin{aligned} \vec{y}(t) = \Phi(t)\vec{c} + \vec{y}_p(t) &= \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{3t} & te^{3t} \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t+1 \\ t + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}t^2e^{3t} \\ -te^{3t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_1e^t - t - 1 \\ (c_2 + c_3t + \frac{1}{2}t^2)e^{3t} - t - \frac{1}{3} \\ (c_3 + t)e^{3t} \end{pmatrix}, \qquad \vec{c} = (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Die Anfangsbedingung besagt $\vec{y}(0) = \vec{y}_0$, also

$$\begin{pmatrix} c_1 - 1 \\ c_2 - \frac{1}{3} \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{d.h.} \qquad c_1 = 2,\ c_2 = \tfrac{7}{3},\ c_3 = 0.$$

Somit ist

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} 2e^t - t - 1 \\ (\frac{7}{3} + \frac{1}{2}t^2)e^{3t} - t - \frac{1}{3} \\ te^{3t} \end{pmatrix}$$

die Lösung des Anfangswertproblems.

Aufgabe 24 **a)** Bezeichnet man die Matrix des Systems mit A, so gilt

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I,$$

woraus $A^{2k} = (A^2)^k = I^k = I$ und $A^{2k+1} = A^{2k}A = IA = A$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ folgt. Damit ergibt sich für jedes $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!}\, t^l A^l = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!}\, t^{2k}A^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!}\, t^{2k+1}A^{2k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!}\, t^{2k}I + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!}\, t^{2k+1}A = \cosh(t)I + \sinh(t)A \\ &= \begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) \\ \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Also ist die allgemeine Lösung von $\vec{y}\,' = A\vec{y}$ gegeben durch

$$\vec{y}(t) = e^{tA}\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1\cosh(t) + c_2\sinh(t) \\ c_1\sinh(t) + c_2\cosh(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \cosh(t) \\ \sinh(t) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sinh(t) \\ \cosh(t) \end{pmatrix}, \qquad \vec{c} = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2.$$

b) Schreibt man $\vec{y} = (y_1, y_2)$, so besagt die gegebene Differentialgleichung gerade

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_1 \end{pmatrix},$$

woraus sich $y_1'' = y_2' = y_1$ ergibt, also $u'' - u = 0$, sofern $u := y_1$ gesetzt ist. Für das charakteristische Polynom dieser homogenen linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten ergibt sich $\lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$. Da dieses die einfachen Nullstellen ± 1 besitzt, lautet die allgemeine Lösung: $y_1(t) = u(t) = a_1 e^t + a_2 e^{-t}$, $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Andererseits erfüllt y_2 die Gleichung $y_2'' = y_1' = y_2$, also $v'' - v = 0$ für $v := y_2$ mit der allgemeinen Lösung $y_2(t) = v(t) = b_1 e^t + b_2 e^{-t}$, $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. Aus der Bedingung $y_1' = y_2$ ergibt sich dann $b_1 = a_1$ und $b_2 = -a_2$, was auf die allgemeine Lösung

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix}, \qquad a_1, a_2 \in \mathbb{R},$$

führt. Diese stimmt tatsächlich mit der in a) gefundenen Lösung überein. (Man muss sich nur an $\cosh(t) = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$ sowie $\sinh(t) = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$ erinnern und a_1, a_2 entsprechend anpassen.)

Aufgabe 25 **a)** Wir berechnen zunächst $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = 2A$. Daher gilt $A^3 = A^2 A = 2AA = 2(2A) = 2^{3-1}A$, und induktiv folgt $A^n = 2^{n-1}A$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Somit lautet die Matrixexponentialfunktion

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} 2^{n-1} A = I + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2t)^n}{n!} A - \frac{1}{2} A \\ &= \frac{1}{2}\big(2I + e^{2t}A - A\big) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + e^{2t} & 1 - e^{2t} \\ 1 - e^{2t} & 1 + e^{2t} \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

b) Wir schreiben $A = B + C$ mit

$$B := \begin{pmatrix} 42 & 0 & 0 \\ 0 & 42 & 0 \\ 0 & 0 & 42 \end{pmatrix} = 42I, \qquad C := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und stellen fest, dass $BC = 42IC = 42CI = CB$ erfüllt ist. Daher gilt nach (1) in Abschnitt 3.5

$$e^{tA} = e^{t(B+C)} = e^{tB} e^{tC} \qquad \text{für jedes } t \in \mathbb{R}.$$

Zum einen ist

$$e^{tB} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} B^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(42t)^n}{n!} I^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(42t)^n}{n!} \right) I = e^{42t} I$$

und zum anderen

$$e^{tC} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} C^n = I + tC + \frac{t^2}{2} C^2 = \begin{pmatrix} 1 & t & 2t + t^2 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

denn

$$C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C^n = C^{n-3} C^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{für alle } n \geqslant 3.$$

Insgesamt erhält man

$$e^{tA} = e^{tB} e^{tC} = e^{42t} \begin{pmatrix} 1 & t & 2t + t^2 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

c) Wir zeigen zuerst den Hinweis: Sei dazu $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulär. Dann gilt

$$(SBS^{-1})^2 = (SBS^{-1})(SBS^{-1}) = SB(S^{-1}S)BS^{-1} = SB^2S^{-1}$$

und induktiv folgt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$(SBS^{-1})^k = SB^kS^{-1}.$$

Nach Definition der Matrixexponentialfunktion ergibt sich somit für jedes $t \in \mathbb{R}$

$$e^{tSBS^{-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (SBS^{-1})^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} SB^kS^{-1} = S\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} B^k\right)S^{-1} = Se^{tB}S^{-1}.$$

Wie in Aufgabe 22 a) gesehen, sind $1, 2$ die Eigenwerte von A mit den zugehörigen Eigenräumen

$$\mathrm{Kern}(A - I) = \mathrm{lin}\{\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}\} \qquad \text{und} \qquad \mathrm{Kern}(A - 2I) = \mathrm{lin}\{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\}.$$

Insbesondere gibt es eine Basis des $\mathbb{C}^3$ aus Eigenvektoren von A, so dass A diagonalisierbar ist. Definiert man

$$S = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\1 & 1 & 0\\3 & 1 & 1\end{pmatrix},$$

dann gilt (vgl. HM II)

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 2\end{pmatrix} =: D.$$

Wegen

$$e^{tD} = \begin{pmatrix}e^t & 0 & 0\\0 & e^{2t} & 0\\0 & 0 & e^{2t}\end{pmatrix}$$

und $A = SDS^{-1}$ ergibt sich unter Berücksichtigung des Hinweises

$$\begin{aligned} e^{tA} = e^{tSDS^{-1}} = Se^{tD}S^{-1} &= \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\1 & 1 & 0\\3 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^t & 0 & 0\\0 & e^{2t} & 0\\0 & 0 & e^{2t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\1 & 2 & -1\\2 & 1 & -1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}2e^{2t} - e^t & e^{2t} - e^t & -e^{2t} + e^t\\ e^{2t} - e^t & 2e^{2t} - e^t & -e^{2t} + e^t\\ 3e^{2t} - 3e^t & 3e^{2t} - 3e^t & -2e^{2t} + 3e^t\end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ein Eigenvektor zum Eigenwert $i\sqrt{\alpha - \beta}$ lautet

$$\begin{pmatrix}1\\ i\sqrt{\alpha-\beta}\\ 1\\ i\sqrt{\alpha-\beta}\end{pmatrix}.$$

Somit haben wir eine (nicht-reelle) Lösung von $(*)$

$$\begin{aligned} e^{i\sqrt{\alpha-\beta}\,t}\begin{pmatrix}1\\ i\sqrt{\alpha-\beta}\\ 1\\ i\sqrt{\alpha-\beta}\end{pmatrix} &= \left(\cos(\sqrt{\alpha-\beta}\,t) + i\sin(\sqrt{\alpha-\beta}\,t)\right)\begin{pmatrix}1\\ i\sqrt{\alpha-\beta}\\ 1\\ i\sqrt{\alpha-\beta}\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\cos(\sqrt{\alpha-\beta}\,t) + i\sin(\sqrt{\alpha-\beta}\,t)\\ i\sqrt{\alpha-\beta}\cos(\sqrt{\alpha-\beta}\,t) - \sqrt{\alpha-\beta}\sin(\sqrt{\alpha-\beta}\,t)\\ \cos(\sqrt{\alpha-\beta}\,t) + i\sin(\sqrt{\alpha-\beta}\,t)\\ i\sqrt{\alpha-\beta}\cos(\sqrt{\alpha-\beta}\,t) - \sqrt{\alpha-\beta}\sin(\sqrt{\alpha-\beta}\,t)\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Durch Zerlegen in Real- und Imaginärteil erhalten wir zwei (reelle) Fundamentallösungen von $(*)$

$$\vec{\phi}_1(t) = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{\alpha-\beta}\,t) \\ -\sqrt{\alpha-\beta}\sin(\sqrt{\alpha-\beta}\,t) \\ \cos(\sqrt{\alpha-\beta}\,t) \\ -\sqrt{\alpha-\beta}\sin(\sqrt{\alpha-\beta}\,t) \end{pmatrix}, \qquad \vec{\phi}_2(t) = \begin{pmatrix} \sin(\sqrt{\alpha-\beta}\,t) \\ \sqrt{\alpha-\beta}\cos(\sqrt{\alpha-\beta}\,t) \\ \sin(\sqrt{\alpha-\beta}\,t) \\ \sqrt{\alpha-\beta}\cos(\sqrt{\alpha-\beta}\,t) \end{pmatrix}.$$

Ein Eigenvektor zum Eigenwert $i\sqrt{\alpha+\beta}$ lautet

$$\begin{pmatrix} 1 \\ i\sqrt{\alpha+\beta} \\ -1 \\ -i\sqrt{\alpha+\beta} \end{pmatrix}.$$

Da

$$\begin{aligned} e^{i\sqrt{\alpha+\beta}\,t}\begin{pmatrix} 1 \\ i\sqrt{\alpha+\beta} \\ -1 \\ -i\sqrt{\alpha+\beta} \end{pmatrix} &= \left(\cos(\sqrt{\alpha+\beta}\,t) + i\sin(\sqrt{\alpha+\beta}\,t)\right)\begin{pmatrix} 1 \\ i\sqrt{\alpha+\beta} \\ -1 \\ -i\sqrt{\alpha+\beta} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{\alpha+\beta}\,t) + i\sin(\sqrt{\alpha+\beta}\,t) \\ i\sqrt{\alpha+\beta}\cos(\sqrt{\alpha+\beta}\,t) - \sqrt{\alpha+\beta}\sin(\sqrt{\alpha+\beta}\,t) \\ -\cos(\sqrt{\alpha+\beta}\,t) - i\sin(\sqrt{\alpha+\beta}\,t) \\ -i\sqrt{\alpha+\beta}\cos(\sqrt{\alpha+\beta}\,t) + \sqrt{\alpha+\beta}\sin(\sqrt{\alpha+\beta}\,t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

gilt, erhalten wir zwei weitere (reelle) Fundamentallösungen von $(*)$

$$\vec{\phi}_3(t) = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{\alpha+\beta}\,t) \\ -\sqrt{\alpha+\beta}\sin(\sqrt{\alpha+\beta}\,t) \\ -\cos(\sqrt{\alpha+\beta}\,t) \\ \sqrt{\alpha+\beta}\sin(\sqrt{\alpha+\beta}\,t) \end{pmatrix}, \qquad \vec{\phi}_4(t) = \begin{pmatrix} \sin(\sqrt{\alpha+\beta}\,t) \\ \sqrt{\alpha+\beta}\cos(\sqrt{\alpha+\beta}\,t) \\ -\sin(\sqrt{\alpha+\beta}\,t) \\ -\sqrt{\alpha+\beta}\cos(\sqrt{\alpha+\beta}\,t) \end{pmatrix}.$$

Zusammen folgt, dass die allgemeine Lösung von $(*)$ durch

$$\begin{pmatrix} s_1(t) \\ h_1(t) \\ s_2(t) \\ h_2(t) \end{pmatrix} = k_1\vec{\phi}_1(t) + k_2\vec{\phi}_2(t) + k_3\vec{\phi}_3(t) + k_4\vec{\phi}_4(t) \qquad (k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{R})$$

gegeben ist. Betrachtet man hier nur die erste und dritte Komponente, so hat man

$$\begin{pmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1\cos(\sqrt{\alpha-\beta}\,t) + k_2\sin(\sqrt{\alpha-\beta}\,t) + k_3\cos(\sqrt{\alpha+\beta}\,t) + k_4\sin(\sqrt{\alpha+\beta}\,t) \\ k_1\cos(\sqrt{\alpha-\beta}\,t) + k_2\sin(\sqrt{\alpha-\beta}\,t) - k_3\cos(\sqrt{\alpha+\beta}\,t) - k_4\sin(\sqrt{\alpha+\beta}\,t) \end{pmatrix}$$

für beliebige $k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{R}$. Setzt man hierin die Werte von α, β ein, dann erhält man das Ergebnis von zuvor.