

Höhere Mathematik III für die Fachrichtungen  
Elektrotechnik und Informationstechnik

6. Übungsblatt

Aufgabe 22

a) Berechnen Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems:

$$u'(t) = 3u(t) + v(t) - w(t)$$

$$v'(t) = u(t) + 3v(t) - w(t)$$

$$w'(t) = 3u(t) + 3v(t) - w(t)$$

b) Bestimmen Sie jeweils ein Fundamentalsystem von

$$\text{i) } \vec{y}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \vec{y}; \quad \text{ii) } \vec{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \vec{y}.$$

Aufgabe 23

Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\vec{y}' = A\vec{y} + \vec{b}(t)$$

sowie die spezielle Lösung zu dem Anfangswert  $\vec{y}(0) = \vec{y}_0$ , wobei die Matrix  $A$ , die Funktion  $\vec{b}$  und der Anfangswert  $\vec{y}_0$  gegeben sind durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 3t \\ e^{3t} \end{pmatrix}, \quad \vec{y}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 24

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\vec{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{y},$$

a) indem Sie die Matrixexponentialfunktion explizit ausrechnen;

b) indem Sie das System in *eine* Differentialgleichung 2. Ordnung umwandeln und die resultierende Gleichung lösen.

## Aufgabe 25

Sei  $t \in \mathbb{R}$ . Berechnen Sie  $e^{tA}$  für die folgenden Matrizen  $A$ :

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 42 & 1 & 2 \\ 0 & 42 & 2 \\ 0 & 0 & 42 \end{pmatrix}; \quad \text{c) } A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

*Hinweis zu c):* Überlegen Sie sich zunächst, dass  $e^{tSBS^{-1}} = Se^{tB}S^{-1}$  für alle  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und alle regulären  $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$  gilt.

**Frohe Weihnachten und ein gutes und erfolgreiches neues Jahr 2013!**

Die **Prüfung** zur HM III findet **am Montag, den 04.03.2013, 11:00 - 13:00 Uhr** statt.  
Zur Teilnahme ist eine Anmeldung erforderlich. **Anmeldeschluss: Freitag, der 08.02.2013.**  
Weitere Informationen zur Prüfung entnehmen Sie bitte der Vorlesungshomepage.