

**Höhere Mathematik III für die Fachrichtungen
Elektrotechnik und Informationstechnik
Lösungsvorschläge zum 7. Übungsblatt**

Aufgabe 26 Wir wiederholen ein paar Details der Charakteristikberechnung:
In der Vorlesung haben wir Gleichungen des Typs

$$\vec{a}(\vec{x}, u) \cdot \nabla u = b(\vec{x}, u), \quad \vec{x} \in D, \quad (1)$$

in $D \subset \mathbb{R}^n$ betrachtet. Hier sind $\vec{a} : D \times J \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $b : D \times J \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben, wobei J ein Intervall in \mathbb{R} ist. Unter diesen Typ fällt auch die Gleichung der Aufgabe 32: Schreibt man nämlich die Koordinaten \vec{x} aus zu $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$, dann können wir $D = \mathbb{R} \times (0, \infty)$, $\vec{a}(\vec{x}, u) = \begin{pmatrix} u \\ 1 \end{pmatrix}$ und $b(\vec{x}, u) = 0$ wählen. Die Charakteristiken, die wir

$$\begin{pmatrix} \vec{k}(s) \\ w(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(s) \\ t(s) \\ w(s) \end{pmatrix}$$

notiert haben, bedeuten dann das folgende: Die Grundcharakteristik $\vec{k}(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ t(s) \end{pmatrix}$ ist ein spezieller Weg im Ort-Zeit-Raum $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ (s ist ein reeller Parameter), von dem man hofft, auf ihm die Lösung u der Gleichung (??) zu kennen: Nämlich soll der Wert $u(\vec{k}(s))$ gegeben sein durch den zweiten Teil der Charakteristik, also durch

$$u(\vec{k}(s)) = w(s).$$

Die Bestimmung der Charakteristiken erfolgt durch Lösen des sog. charakteristischen Systems

$$\begin{aligned} \vec{k}'(s) &= \vec{a}(\vec{k}(s), w(s)) \\ w'(s) &= b(\vec{k}(s), w(s)) \end{aligned} \quad (2)$$

(vgl. Vorlesung), was wir nun konkret mit der vorgegebenen Gleichung tun wollen:
Das Differentialgleichungssystem (??) lautet hier

$$\begin{aligned} \vec{k}'(s) &= \begin{pmatrix} w(s) \\ 1 \end{pmatrix} \\ w'(s) &= 0. \end{aligned}$$

Die zweite Zeile lösen wir sofort zu $w(s) = \text{const}$, also etwa $w(s) = w(0)$.
Die erste Zeile lösen wir dann konsequenterweise zu

$$\vec{k}(s) = \begin{pmatrix} w(0) \\ 1 \end{pmatrix} s + \vec{k}(0).$$

Nun können wir noch den Startpunkt $\vec{k}(0)$ der Charakteristik wählen: Wir tun dies der Einfachheit halber durch $\vec{k}(0) = \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix}$ mit einem reellen Parameter ξ , weil auf $\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix} : \xi \in \mathbb{R} \right\}$ die Anfangswerte vorgegeben sind. Die Anfangsbedingung ergibt $u(\xi, 0) = w(0) = f(\xi)$, also

$$\vec{k}(s) = \begin{pmatrix} f(\xi) \\ 1 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Für den Lösungskandidaten u erhält man also die Information

$$u(x, t) = f(\xi),$$

falls $\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \vec{k}(s) = \begin{pmatrix} f(\xi)s + \xi \\ s \end{pmatrix}$ für ein $s \in \mathbb{R}$ gilt, anders gesagt, falls $x = f(\xi)t + \xi$ (die zweite Zeile ergibt $t = s$, was man in die erste Zeile einsetzt).

a) Wie eben erwähnt, ist $u(x, t) = f(\xi)$ für

$$x = f(\xi)t + \xi. \quad (3)$$

Die Bedingung (??) ist für jedes fest gewählte $t \geq 0$ und jedes fest gewählte $x \in \mathbb{R}$ eindeutig nach ξ auflösbar, was wir jetzt nachweisen.

Kommentar: Die nachfolgende Rechnung hat eine einfache geometrische Interpretation: Verschiedene Grundcharakteristiken schneiden sich nicht!

1. Fall: $x \leq 0$.

Sei $\xi \in \mathbb{R}$. Wir nehmen an, dass (??) erfüllt ist. Wegen $f(\xi) \geq 0$ gilt $f(\xi)t \geq 0$ für jedes $t \geq 0$. Damit folgt $\xi = x - f(\xi)t \leq 0$, so dass $f(\xi) = 0$ ist. Insbesondere lautet (??) dann $x = \xi$. Also ist ξ eindeutig festgelegt.

Andererseits löst die Wahl $\xi = x$ natürlich die Gleichung (??).

2. Fall: $x > 0$.

Falls ξ die Gleichung (??) löst, muss $\xi > 0$ gelten, denn sonst wäre $\xi \leq 0$ und $x = 0 \cdot t + \xi \leq 0$. Betrachten wir (??) als Funktion $g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $\xi \mapsto x = f(\xi)t + \xi$. Dann ist g umkehrbar, denn g ist wegen

$$g'(\xi) = e^{-\frac{1}{\xi}} \cdot \frac{t}{\xi^2} + 1 \geq 1 > 0 \quad \text{für alle } \xi \in (0, \infty)$$

auf $[0, \infty)$ streng monoton wachsend und es gilt $g(0) = 0$. Deshalb existiert genau ein $\xi > 0$ so, dass (??) gilt.

Kommentar: Die obige Rechnung hat gezeigt, dass das obige u wohldefiniert ist. Dass u tatsächlich das ursprüngliche Problem löst, folgt dann aus Abschnitt 4.4 der Vorlesung oder lässt sich alternativ direkt nachprüfen: Es gilt

$$\partial_x u(x, t) = \partial_x f(\tilde{g}(x)),$$

wobei \tilde{g} die Umkehrfunktion vom obigen g ist. Wende nun den Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion aus HM II an. Man berechnet außerdem

$$\partial_t u(x, t) = \partial_t f(\xi(t)) \cdot \xi'(t),$$

indem man $h(\xi) = \frac{x-\xi}{f(\xi)}$ nach ξ differenziert und dann daraus die Ableitung der Umkehrfunktion von h , also die Ableitung von $\xi(t)$, bestimmt.

b) Nehmen wir an, u ist eine Lösung der Gleichung (??) und $\begin{pmatrix} \vec{k}(s) \\ w(s) \end{pmatrix}$ ist eine Lösung von (??).

Dann gilt nach der Kettenregel

$$(u \circ \vec{k})'(s) = \nabla u(\vec{k}(s)) \cdot \vec{k}'(s) = \nabla u(\vec{k}(s)) \cdot \vec{a}(\vec{k}(s), w(s)) \stackrel{(??.)}{=} 0. \quad (4)$$

Also ist hier u auf Grundcharakteristiken konstant.

Nun nehmen wir zusätzlich an, dass f stetig differenzierbar ist und nicht monoton wachsend. In diesem Fall existieren also $x_0 < x_1$ mit $f(x_0) > f(x_1)$. Die dazugehörigen Grundcharakteristiken

$$\vec{k}_0(s) = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ 1 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{k}_1(s) = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ 1 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

schneiden sich dann, denn die Schnittgleichung

$$\vec{k}_0(s) = \vec{k}_1(s) \iff f(x_0)s + x_0 = f(x_1)s + x_1 \iff (f(x_0) - f(x_1))s = x_1 - x_0$$

hat eine Lösung $s > 0$.

Damit kann eine Lösung u von (??) höchstens bis zu dem Zeitpunkt $t = s = \frac{x_1 - x_0}{f(x_0) - f(x_1)}$ existieren, da sonst ein Widerspruch zur Konstanz von u auf Grundcharakteristiken

$$u(\vec{k}_0(s)) = u(\vec{k}_0(0)) = f(x_0) \neq f(x_1) = u(\vec{k}_1(0)) = u(\vec{k}_1(s))$$

(vgl. (??)) entsteht.

Aufgabe 27 Wir bringen die Gleichung in die Form $\vec{a}(x, t, u) \cdot \nabla u = b(x, t, u)$ (das ist (??) mit $\vec{x} = (x, t)$), also gilt hier $\vec{a}(x, t, u) = \begin{pmatrix} \cos t \\ 1 \end{pmatrix}$ und $b(x, t, u) = 0$. Wir bestimmen die Charakteristiken $\begin{pmatrix} \vec{k}(s) \\ w(s) \end{pmatrix}$, wobei $\vec{k}(s) = \begin{pmatrix} k_1(s) \\ k_2(s) \end{pmatrix}$. Das charakteristische System (??) lautet hier

$$\begin{aligned} \vec{k}'(s) &= \begin{pmatrix} k_1'(s) \\ k_2'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(k_2(s)) \\ 1 \end{pmatrix} \\ w'(s) &= 0. \end{aligned}$$

Wir erhalten $k_2(s) = s + c_2$ und damit $k_1'(s) = \cos(s + c_2)$, woraus $k_1(s) = \sin(s + c_2) + c_1$ folgt. Außerdem erhalten wir wieder $w(s) = \text{const} =: w_0$.

Für jede Wahl von $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ erhalten wir also eine Grundcharakteristik $s \mapsto \begin{pmatrix} \sin(s + c_2) + c_1 \\ s + c_2 \end{pmatrix}$; wir bezeichnen diese mit $\vec{k}^{(c_1, c_2)}$.

Fazit: Für jede Wahl von $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ und w_0 erhalten wir eine Charakteristik $s \mapsto \begin{pmatrix} \vec{k}^{(c_1, c_2)}(s) \\ w_0 \end{pmatrix}$.

Wir stellen fest, dass $\vec{k}^{(c_1, c_2)}(s - c_2) = \begin{pmatrix} \sin(s) + c_1 \\ s \end{pmatrix} = \vec{k}^{(c_1, 0)}(s)$ gilt, d.h. $\vec{k}^{(c_1, c_2)}$ und $\vec{k}^{(c_1, 0)}$ sind nur Umparametrisierungen der gleichen Kurve und es genügt eine davon zu untersuchen. Wir wählen daher im folgenden stets $c_2 = 0$ und statt $\vec{k}^{(c_1, 0)}$ schreiben wir $\vec{k}^{(c_1)}$.

Wir untersuchen nun Randpunkte $\vec{r} = (x, t) \in R$ und unterscheiden dabei drei Fälle:

1. Fall: $r = (x, 0)$ mit (festem) $x \in (0, 2\pi)$ („unterer Rand“)

Wir überlegen uns, welche Grundcharakteristik durch den Punkt $(x, 0)$ verläuft: Aus $\vec{k}^{(c_1)}(s) \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ folgt $\sin(s) + c_1 = x$, $s = 0$, also $c_1 = x$. D.h. die Grundcharakteristik $\vec{k}^{(x)}$ verläuft bei $s = 0$ durch $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$.

Für $h > 0$ gilt $\vec{k}^{(x)}(h) = \begin{pmatrix} \sin(h) + x \\ h \end{pmatrix}$. Für genügend kleines $h > 0$ ist $\sin(h) + x \in (0, 2\pi)$, also $\vec{k}^{(c_1)}(h) \in Q$, mit anderen Worten: die Grundcharakteristik läuft nach Q hinein.

2. Fall: $r = (0, t)$ mit (festem) $t \in [0, \infty)$ („linker Rand“)

Wir überlegen uns wieder, welche Grundcharakteristik durch den Punkt $(0, t)$ verläuft: Aus $\vec{k}^{(c_1)}(s) \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}$ folgt $\sin(s) + c_1 = 0$, $s = t$, also $c_1 = -\sin(t)$. D.h. die Grundcharakteristik $\vec{k}^{(-\sin(t))}$ verläuft bei $s = t$ durch $\begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}$.

Für $h > 0$ gilt $\vec{k}^{(-\sin(t))}(t + h) = \begin{pmatrix} \sin(t + h) - \sin(t) \\ t + h \end{pmatrix}$.

Nach dem Mittelwertsatz gibt es $\xi \in (t, t + h)$ mit $\sin(t + h) - \sin(t) = h \cos(\xi)$. Mit genügend kleinem $h > 0$ liegt ξ nahe bei t (es gilt aber stets $\xi > t$). Es gilt dann also

$\sin(t+h) - \sin(t) > 0$ falls $t \in P := [0, \frac{\pi}{2}) \cup [\frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi) \cup [\frac{7}{2}\pi, \frac{9}{2}\pi) \cup \dots$ und

$\sin(t+h) - \sin(t) < 0$ falls $t \in N := [\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi) \cup [\frac{5}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi) \cup [\frac{9}{2}\pi, \frac{11}{2}\pi) \cup \dots$

Für $t \in P$ (und genügend kleinem $h > 0$) gilt also $\vec{k}^{(-\sin(t))}(t+h) \in Q$, mit anderen Worten: die Grundcharakteristik läuft in diesem Fall nach Q hinein.

Für $t \in N$ (und genügend kleinem $h > 0$) gilt analog $\vec{k}^{(-\sin(t))}(t+h) \notin Q$, mit anderen Worten: die Grundcharakteristik läuft in diesem Fall aus Q heraus.

Es gilt $[0, \infty) = P \cup N$, d.h. wir haben alle möglichen Fälle untersucht.

3. Fall: $r = (2\pi, t)$ mit (festem) $t \in [0, \infty)$ („rechter Rand“)

Wir überlegen uns wieder, welche Grundcharakteristik durch den Punkt $(2\pi, t)$ verläuft: Aus $\vec{k}^{(c_1)}(s) \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 2\pi \\ t \end{pmatrix}$ folgt $\sin(s) + c_1 = 2\pi$, $s = t$, also $c_1 = 2\pi - \sin(t)$. D.h. die Grundcharakteristik $\vec{k}^{(2\pi - \sin(t))}$ verläuft bei $s = t$ durch $\begin{pmatrix} 2\pi \\ t \end{pmatrix}$.

Für $h > 0$ gilt $\vec{k}^{(2\pi - \sin(t))}(t+h) = \begin{pmatrix} 2\pi + \sin(t+h) - \sin(t) \\ t+h \end{pmatrix}$.

Wir verwenden die Vorzeichenüberlegungen zu $\sin(t+h) - \sin(t)$ von oben und erhalten:

Für $t \in N$ (und genügend kleinem $h > 0$) gilt $\vec{k}^{(-\sin(t))}(t+h) \in Q$, mit anderen Worten: die Grundcharakteristik läuft in diesem Fall nach Q hinein.

Für $t \in P$ (und genügend kleinem $h > 0$) gilt $\vec{k}^{(-\sin(t))}(t+h) \notin Q$, mit anderen Worten: die Grundcharakteristik läuft in diesem Fall aus Q heraus.

Das waren wieder alle möglichen Fälle.

Zusammenfassung: Für

$$r \in R_{\text{rein}} := (0, 2\pi) \times \{0\} \cup \{0\} \times P \cup \{2\pi\} \times N$$

läuft die Grundcharakteristik nach Q hinein, für $r \in R \setminus R_{\text{rein}}$ läuft sie aus Q heraus.

Aufgabe 28 Wir bringen die Gleichung in die Form $\vec{a}(x, t, u) \cdot \nabla u = b(x, t, u)$, also gilt hier

$$\vec{a}(x, t, u) = \begin{pmatrix} tu \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b(x, t, u) = u.$$

Anfangswerte sind vorgegeben auf $\Gamma := \{(\xi, 0) : \xi \in \mathbb{R}\}$ und es gilt dort $u(\xi, 0) = -\xi =: f(\xi)$.

Das charakteristische System lautet:

$$\vec{k}'(s) = \vec{a}(\vec{k}(s), w(s)) = \vec{a}(k_1(s), k_2(s), w(s)) = \begin{pmatrix} k_2(s) \cdot w(s) \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$w'(s) = b(\vec{k}(s), w(s)) = b(k_1(s), k_2(s), w(s)) = w(s).$$

Für jedes feste $\vec{\xi} = \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix} \in \Gamma$ lösen wir das charakteristische System mit folgenden Anfangswerten

$$(\text{vgl. Abschnitt 4.4, Skriptum}): \begin{pmatrix} \vec{k} \\ w \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix} \\ f(\xi, 0) \end{pmatrix}.$$

Also $k_1(0) = \xi$, $k_2(0) = 0$, $w(0) = f(\xi, 0) = -\xi$.

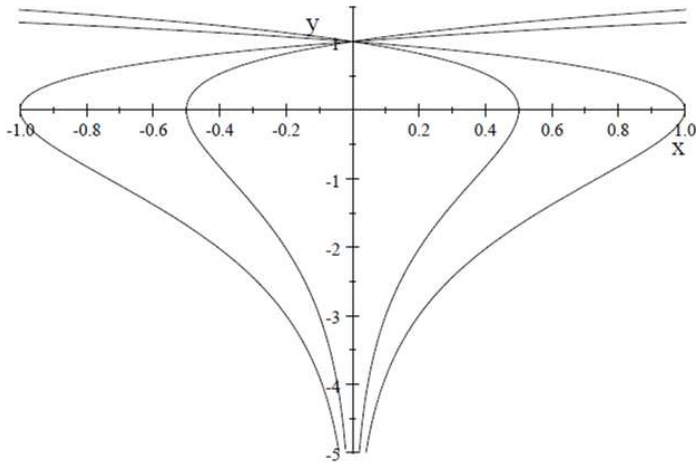
Somit folgt $k_2(s) = s$ und $w(s) = -\xi e^s$, was auf $k_1'(s) = k_2(s)w(s) = s \cdot (-\xi)e^s$, also $k_1(s) = -\xi(s-1)e^s$ (wegen $k_1(0) = \xi$) führt.

Für jedes feste $\vec{\xi} = \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix} \in \Gamma$ erhalten wir so eine Charakteristik. Diese bezeichnen wir mit

$$\begin{pmatrix} \vec{k}(\cdot, \vec{\xi}) \\ w(\cdot, \vec{\xi}) \end{pmatrix}. \quad (\text{Es gilt also } \vec{k}(s, \vec{\xi}) = \begin{pmatrix} -\xi(s-1)e^s \\ s \end{pmatrix} \text{ und } w(s, \vec{\xi}) = -\xi e^s \text{ für alle } s \in \mathbb{R}.)$$

Zur Veranschaulichung zeichnen wir einige Grundcharakteristiken (nämlich für $\xi = 1$, $\xi = 1/2$,

$\xi = 0$, $\xi = -1/2$ und $\xi = -1$) in den Argumentraum:



(Das ist natürlich jeweils der an der ersten Winkelhalbierenden gespiegelte Funktionsgraph der Funktion $s \mapsto -\xi(s-1)e^s$.) Wir beobachten dabei (und rechnen leicht nach), dass gilt:

- Jede Grundcharakteristik geht durch $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. (Nämlich jeweils bei $s = 1$: $\vec{k}(1, \vec{\xi}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.)
- Durch $\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $x \neq 0$ verläuft keine Grundcharakteristik.
- Durch alle übrigen Punkte (x, t) (also alle Punkte mit $t \neq 1$) geht genau eine Grundcharakteristik.

(Das zeigen wir so: Sei (x, t) mit $t \neq 1$ gegeben. Wir suchen $\vec{\xi} = \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix}$ so, dass es ein s gibt

mit $\vec{k}(s, \vec{\xi}) = \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$. Das ist gleichbedeutend mit

$$\begin{cases} k_1(s, \vec{\xi}) = -\xi(s-1)e^s = x \\ k_2(s, \vec{\xi}) = s = t \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad \begin{cases} s = t \\ \xi = -\frac{x}{t-1}e^{-t} \end{cases}$$

(Das bedeutet: Die Grundcharakteristik $\vec{k}(\cdot, \begin{pmatrix} -\frac{x}{t-1}e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix})$ (und nur diese) verläuft durch den Punkt (x, t) (und zwar bei $s = t$.)

Einen „Kandidaten“ für den Wert der Lösung an der Stelle (x, t) mit $t \neq 1$ erhalten wir jetzt durch Auswerten von $w(\cdot, \begin{pmatrix} -\frac{x}{t-1}e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix})$ bei $s = t$:

$$u(x, t) = u(\vec{k}(t, \begin{pmatrix} -\frac{x}{t-1}e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix})) = w(t, \begin{pmatrix} -\frac{x}{t-1}e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}) = \frac{x}{t-1}e^{-t}e^t = \frac{x}{t-1}.$$

Durch Einsetzen prüft man leicht nach, dass $u(x, t) = \frac{x}{t-1}$ tatsächlich die partielle Differentialgleichung samt Anfangsbedingung bis zum Zeitpunkt $t = 1$ löst (genauer: auf $\mathbb{R} \times (-\infty, 1)$). Über den Zeitpunkt $t = 1$ hinaus lässt sich die Lösung nicht fortsetzen.

Aufgabe 29 Sei $A = (a_{kl})_{k,l=1,\dots,n}$ eine $n \times n$ -Matrix mit $A^T A = I$ und $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion.

Definiere $\vec{g}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$, also $g_k(\vec{x}) = \sum_{l=1}^n a_{kl}x_l$ für jedes $k = 1, \dots, n$. Dann ist

$$\frac{\partial g_k}{\partial x_j}(\vec{x}) = a_{kj} \quad \text{für } j, k = 1, \dots, n.$$

Nach der Kettenregel gilt

$$\frac{\partial(f \circ g)}{\partial x_j}(\vec{x}) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(g(\vec{x})) \underbrace{\frac{\partial g_k}{\partial x_j}(\vec{x})}_{=a_{kj}}$$

und

$$\frac{\partial^2(f \circ g)}{\partial x_j^2}(\vec{x}) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \circ g \right)(\vec{x}) a_{kj} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_k}(\underbrace{g(\vec{x})}_{=A\vec{x}}) \underbrace{\frac{\partial g_l}{\partial x_j}(\vec{x})}_{=a_{lj}} a_{kj}.$$

Dies führt auf

$$\Delta(f \circ A)(\vec{x}) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2(f \circ A)}{\partial x_j^2}(\vec{x}) = \sum_{j,k,l=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_k}(A\vec{x}) a_{lj} a_{kj} = \sum_{k,l=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{lj} a_{kj} \right) \frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_k}(A\vec{x}).$$

Die innere Summe entspricht dem Skalarprodukt der l -ten mit der k -ten Zeile der Matrix A . Da A orthogonal ist, verschwindet dieses Skalarprodukt, außer wenn $l = k$ ist. In diesem Fall ist es $= 1$. Somit folgt

$$\Delta(f \circ A)(\vec{x}) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_k}(A\vec{x}) = (\Delta f)(A\vec{x}).$$

Bemerkung: Wir haben eben nachgerechnet: Ist $u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung der Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$ und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine orthogonale Matrix, dann löst auch die Funktion $v: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\vec{x} \mapsto u(A\vec{x})$ die Laplace-Gleichung. Anschaulich bedeutet diese Aussage, dass auch um den Ursprung gedrehte oder am Ursprung gespiegelte Lösungen der Laplace-Gleichung diese ebenfalls lösen.

Aufgabe 30 a) Es sei u eine harmonische Funktion. Wir suchen eine holomorphe Funktion f mit $\operatorname{Re} f = u$. Dabei setzen wir $v = \operatorname{Im} f$, so dass $f = u + iv$ gilt.

Die Funktion f ist holomorph genau dann, wenn u und v C^1 -Funktionen sind und die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen gelten, also $\partial_x u = \partial_y v$, $\partial_y u = -\partial_x v$. Die harmonische Funktion u ist per definitionem eine C^2 -Funktion. Sei $(x_0, y_0) \in \Omega$ fest gewählt. Wegen der Bedingung $\partial_y v = \partial_x u$ setzen wir

$$v(x, y) := \int_{y_0}^y \partial_x u(x, \tilde{y}) d\tilde{y} + c(x),$$

wobei die rechte Seite eine Stammfunktion in y bei festgehaltenem x sein soll. So eine Stammfunktion existiert immer, zumindest lokal!

Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt, dass v eine C^1 -Funktion ist. Wir prüfen nun, dass auch die zweite Cauchy-Riemannsche Differentialgleichung $\partial_x v = -\partial_y u$ erfüllt ist. Nach einem Satz in 4.1 gilt

$$\begin{aligned} \partial_x v(x, y) &= \int_{y_0}^y \partial_x^2 u(x, \tilde{y}) d\tilde{y} + c'(x) = - \int_{y_0}^y \partial_y^2 u(x, \tilde{y}) d\tilde{y} + c'(x) = - [\partial_y u(x, \tilde{y})]_{\tilde{y}=y_0}^{\tilde{y}=y} + c'(x) \\ &= -\partial_y u(x, y) + \partial_y u(x, y_0) + c'(x) = -\partial_y u(x, y), \end{aligned}$$

wobei die zweite Gleichung aus der Tatsache folgt, dass u harmonisch ist. Dabei haben wir $c(x) := - \int_{x_0}^x \partial_y u(\tilde{x}, y_0) d\tilde{x}$ gewählt, damit $c'(x) = -\partial_y u(x, y_0)$ gilt und $f = u + iv$ ist eine holomorphe Funktion.

b) Für $(x, y) \neq (0, 0)$ haben wir $u_y(x, y) = -\frac{x}{(x^2+y^2)^2} 2y$ und damit $v_x(x, y) = -u_y(x, y) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$ nach den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen. Es folgt

$$v(x, y) = \int \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} dx = \frac{-y}{x^2+y^2} + c(y)$$

mit einer gewissen Funktion c . Aus der Bedingung $v_y = u_x$ schließen wir

$$v_y(x, y) = \frac{-(x^2 + y^2) + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} + c'(y) \stackrel{!}{=} u_x(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \iff c'(y) = 0.$$

Wir wählen $c(y) = 0$ (jede andere Konstante hätte es auch getan) und erhalten für $(x, y) \neq 0$

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{-y}{x^2 + y^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x - iy}{(x - iy)(x + iy)} = \frac{1}{x + iy}.$$

Insbesondere ist u als Realteil der holomorphen Funktion f harmonisch.

c) Annahme: Es gibt eine auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorphe Funktion f so, dass $u = \operatorname{Re} f$ gilt. Dann folgt aus den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen für $z = x + iy$ (mit $x, y \in \mathbb{R}$)

$$f'(z) = u_x(x, y) + iv_x(x, y) = u_x(x, y) - iu_y(x, y). \quad (*)$$

Für $u(x, y) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2})$, $(x, y) \neq (0, 0)$, erhält man

$$u_x(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} 2x = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

und analog

$$u_y(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Einsetzen in (*) ergibt

$$f'(z) = f'(x + iy) = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{x + iy} = \frac{1}{z}.$$

Dies ist unmöglich, weil $z \mapsto 1/z$ auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ keine Stammfunktion besitzt. Deshalb ist die anfängliche Annahme falsch und es existiert keine auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorphe Funktion f mit $u = \operatorname{Re} f$.

[Wäre f auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorph mit $f'(z) = 1/z$ für alle $z \neq 0$, dann würde für die durch $\gamma(t) = e^{it}$ gegebene Kurve $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ gelten $0 = f(1) - f(1) = \oint_{\gamma} f'(z) dz = \oint_{\gamma} \frac{1}{z} dz = 2\pi i$. Widerspruch!]