Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann
Dr. S. Wugalter

WS 2012/2013
26.01.2013

Übungsklausur

Höhere Mathematik III für die Fachrichtungen Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge

Aufgabe 1
Zunächst ermitteln wir ein Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen Gleichung $\vec{y}\,' = A\vec{y}$. Offensichtlich sind -1 und 3 die Eigenwerte von A. Die zugehörige Eigenvektoren sind $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Damit erhalten wir die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$\vec{\phi}_h(x) = C_1 e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + C_2 e^{3x} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Eine spezielle Lösung $\vec{y}_p$ der inhomogenen Gleichung $\vec{y}\,' = A\vec{y} + \begin{pmatrix} 2e^x \\ -e^x \end{pmatrix}$ lässt sich durch Variation der Konstanten bestimmen. Danach ist $\vec{y}_p$ gegeben durch

$$\vec{y}_p(x) = C_1(x) e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + C_2(x) e^{3x} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Die Koeffizienten $C_1(x)$ und $C_2(x)$ erfüllen das System

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{-x} + C_2'(x)e^{3x} = 2e^x \\ -2C_1'(x)e^{-x} + 2C_2'(x)e^{3x} = -e^x \end{cases} \tag{1}$$

Das System (1) hat die Lösung $C_1'(x) = \frac{5}{4}e^{2x}, C_2'(x) = \frac{3}{4}e^{-2x}$. Damit gilt $C_1(x) = \frac{5}{8}e^{2x}$, $C_2(x) = \frac{-3}{8}e^{-2x}$ und die allgemeine Lösung des Systems ist

$$\vec{\phi}_{allg}(x) = (\frac{5}{8}e^{2x} + C_3)e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + (\frac{-3}{8}e^{-2x} + C_4)e^{3x} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 a) Die Differentialgleichung ist von der Form $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ mit

$$P(x,y) := y\,, \qquad Q(x,y) := (2x - ye^y)\,.$$

Offenbar sind $P, Q\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Die Differentialgleichung ist nicht exakt, denn es gilt

$$P_y(x,y) - Q_x(x,y) = 1 - 2 \neq 0\,.$$

Wir suchen einen integrierenden Faktor μ, der nur von y abhängt. Für $\mu = \mu(y)$ soll $(\mu P)_y = (\mu Q)_x$ gelten, also

$$\mu P_y + \mu' P = \mu Q_x\,, \qquad \text{d. h.} \qquad \mu' y = \mu.$$

Eine Lösung hiervon ist $\mu(y) = y$. Für $x > 0$ haben wir damit einen integrierenden Faktor gefunden. Wir multiplizieren die Differentialgleichung mit $\mu(y) = y$ und lösen die sich ergebende exakte Differentialgleichung

$$y^2\,dx + (2xy - y^2e^y)\,dy = 0\,, \qquad \text{d. h.} \qquad d(y^2x) = y^2e^y\,dy\,.$$

Nach der Integration bekommen wir die implizite Lösung der Gleichung

$$F(x,y) := y^2x - e^y(y^2 - 2y + 2) + C = 0$$

Aus der Anfangsbedingung folgt, dass

$$C = -4 + 2e^2$$

gilt und die implizite Lösung des Anfangswertproblems

$$y^2x - e^y(y^2 - 2y + 2) - 4 + 2e^2 = 0$$

ist.

b) Es handelt sich um eine Riccatische Differentialgleichung und nach dem Hinweis haben wir eine spezielle Lösung $(y_0(x) = x + 2)$. Alle weiteren Lösungen y bekommen wir nun mit dem Ansatz $u = y - y_0$. Dieser liefert für die Funktion u gemäß Vorlesung die Gleichung

$$u' + 4u + u^2 = 0\,.$$

Dies ist eine Bernoullische Differentialgleichung mit Exponent $\alpha = 2$. Sie hat $u \equiv 0$ als eine Lösung; alle anderen Lösungen erhalten wir, indem wir mit $(1-\alpha)u^{-\alpha} = -u^{-2}$ multiplizieren und $z = u^{1-\alpha} = u^{-1}$ substituieren. Dies führt auf

$$z' - 4z - 1 = 0\,.$$

Die Gleichung $z' - 4z - 1 = 0$ hat die allgemeine Lösung $z(x) = Ce^{4x} - \frac{1}{4}$, $C \in \mathbb{R}$. Für u muss also $u(x) = 1/z(x) = (Ce^{4x} - \frac{1}{4})^{-1}$ mit geeignetem $C \in \mathbb{R}$ gelten und damit folgt $y(x) = u(x) + y_0(x) = (Ce^{4x} - \frac{1}{4})^{-1} + x + 2$.
Die Anfangsbedingung besagt $0 = y(1) = (Ce^4 - \frac{1}{4})^{-1} + 3$, also $C = -\frac{1}{12}e^{-4}$. Als Lösung des Anfangswertproblems erhalten wir demnach $y(x) = -12(e^{4(x-1)} + 3)^{-1} + x + 2$.

Aufgabe 3 Diese Eulersche Differentialgleichung behandeln wir, indem wir die neue Variable $t = \ln x$ einführen. Die Gleichung wird dann wegen $x = e^t$ zu

$$e^{2t}y''(e^t) + 4e^ty'(e^t) + 2y(e^t) = 0\,.$$

Mit $u(t) := y(e^t)$ haben wir $u'(t) = e^ty'(e^t)$ und $u''(t) = e^ty'(e^t) + e^{2t}y''(e^t)$. Unsere Gleichung lautet somit

$$u''(t) + 3u'(t) + 2u(t) = 0\,.$$

Dies ist eine homogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Da das charakteristische Polynom $p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 3$ die einfachen Nullstellen -2 und -1 hat, ist die allgemeine Lösung von $u'' + 3u' + 2 = 0$ gegeben durch $u(t) = c_1e^{-2t} + c_2e^{-t}$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Die allgemeine Lösung der Eulerschen Gleichung ist somit

$$y(x) = c_1x^{-2} + c_2x^{-1}\,.$$

Aufgabe 4 Wir betrachten die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung mit Dirichlet-

Randbedingungen

$$\begin{aligned} &\partial_t u(t,x) = \partial_{xx} u(t,x) \quad \text{für } t>0,\ x\in(0,1),\\ &u(t,0) = 0 = u(t,1) \quad \text{für } t>0 \end{aligned}$$

und machen den Ansatz $u_k(t,x) = v_k(t)w_k(x)$, $t > 0$, $x \in (0,1)$. Die Funktion $u_k(t,x)$ ist genau dann eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung, wenn ein $\lambda_k \in \mathbb{R}$ existiert, so dass

$$\begin{aligned} (a) \qquad & v_k'(t) = \lambda_k v_k(t)\\ (b) \qquad & w_k''(x) = \lambda_k w_k(x) \end{aligned}$$

gilt. Die Lösung von (a) ist $v_k(t) = v_k(0)e^{\lambda_k t}$, die allgemeine Lösung von (b) lautet $w_k(x) = \alpha e^{\sqrt{\lambda_k}x} + \beta e^{-\sqrt{\lambda_k}x}$.

Bei dem Ansatz $u_k(t,x) = v_k(t)w_k(x)$ ergibt sich für die Randbedingungen $u_k(t,0) = 0 = u_k(t,1)$: $v_k(t)w_k(0) = 0 = v_k(t)w_k(1)$, im nichttrivialen Fall $v_k \neq 0$ also $w_k(0) = 0 = w_k(1)$, d.h.

$$\begin{aligned} (c) \qquad & \alpha + \beta = 0\\ (d) \qquad & \alpha e^{\sqrt{\lambda_k}} + \beta e^{-\sqrt{\lambda_k}} = 0. \end{aligned}$$

Setzt man (c) in (d) ein, so ergibt sich die Bedingung

$$(e^{\sqrt{\lambda}} - e^{-\sqrt{\lambda}}) = 0.$$

Wir gehen weiterhin von dem nichttrivialen Fall $\lambda_k, \alpha \neq 0$ aus. Dann folgt $\sqrt{\lambda_k} = k\pi i$. Somit ist w_k von der Gestalt $w_k(x) = \alpha e^{k\pi i x} - \alpha e^{-k\pi i x} = c_k \sin(k\pi x)$ mit $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$ Da $\sin(x) = -\sin(-x)$ gilt, können wir $k \in \mathbb{N}$ annehmen. Damit lauten die separierte-Variablen-Lösungen

$$u_k(t,x) = c_k e^{-k^2\pi^2 t}\sin(k\pi x) \qquad (t > 0, x \in [0,1])$$

mit $k \in \mathbb{N}_0$ und $c_k \in \mathbb{R}$. Offensichtlich erfüllt eine konvergente Summe

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-k^2\pi^2 t}\sin(k\pi x) \qquad (t > 0, x \in [0,1])$$

die Differentialgleichung und die Randbedingungen. Aus der Anfangsbedingung folgt, dass $c_k = 0$ für $k \neq 3$ und $c_k = 1$ für $k = 3$ ist. Als Lösung des Anfangswertproblems erhalten wir

$$u(t,x) = e^{-9\pi^2 t}\sin(3\pi x).$$