Karlsruher Institut für Technologie (KIT) WS 2015/2016
Institut für Analysis
Dr. Ioannis Anapolitanos
Dr. Semjon Wugalter

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 4. Übungsblatt

Aufgabe 1 **a)** Wir machen einen Potenzreihenansatz; es gilt also

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k\,, \qquad y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1}$$

für (zu bestimmende) Koeffizienten $c_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}_0$. Eingesetzt in die linke Seite der Differentialgleichung ergibt sich

$$\begin{aligned} y' + xy &= \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_{n+1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^n \\ &= (0+1) c_{0+1} x^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \Big((n+1) c_{n+1} + c_{n-1} \Big) x^n\,. \end{aligned}$$

Auf der rechten Seite der Differentialgleichung steht 0, so dass ein Koeffizientenvergleich

$$c_1 = 0 \qquad \text{und} \qquad c_{n+1} = -\frac{c_{n-1}}{n+1} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

liefert. Es gilt $c_3 = c_{2+1} = -\frac{c_{2-1}}{2+1} = 0$, und damit auch $c_5 = c_7 = c_9 = \cdots = 0$.
Da kein Anfangswert vorgegeben ist, gibt es keine Bedingung an c_0, so dass $c_0 \in \mathbb{R}$ frei wählbar ist. Aus der Rekursionsvorschrift ergeben sich dann die Werte

$$c_2 = \frac{-c_0}{2}\,, \qquad c_4 = -\frac{c_2}{4} = \frac{c_0}{2\cdot 4}\,, \qquad c_6 = -\frac{c_4}{6} = \frac{-c_0}{2\cdot 4\cdot 6}\,, \qquad c_8 = -\frac{c_6}{8} = \frac{c_0}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\,,$$

und damit kommen wir zu der Vermutung

$$c_{2n} = \frac{(-1)^n c_0}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2n)} \qquad (n \in \mathbb{N})\,,$$

die wir induktiv beweisen. Der Induktionsanfang ist schon gemacht; es fehlt noch der Induktionsschluss: Sei $n \in \mathbb{N}$. Es gelte $c_{2n} = \frac{(-1)^n c_0}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)}$ (IV). Dann folgt mit der Rekursionsformel

$$c_{2(n+1)} = c_{(2n+1)+1} = -\frac{c_{2n}}{(2n+2)} \overset{\text{IV}}{=} \frac{(-1)^{n+1} c_0}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2n)\cdot(2n+2)}\,.$$

Nun kennen wir alle Koeffizienten in der Potenzreihenentwicklung von y. Die allgemeine Lösung von $y' + xy = 0$ lautet

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} x^{2n+1} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n c_0}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)}\, x^{2n} + 0 \\ &= c_0 \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\cdot 2^n}\, x^{2n} \right) = c_0 \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x^2/2)^n}{n!} \right) = c_0\, e^{-x^2/2}\,, \qquad c_0 \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

b) Wieder machen wir einen Potenzreihenansatz; es gilt also

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k\,, \qquad y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1}\,, \qquad y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k x^{k-2}\,.$$

(Wegen der Anfangsbedingungen kennen wir schon die Koeffizienten $c_0 = y(0) = 0$ und $c_1 = y'(0) = 1$.) Eingesetzt in die linke Seite der Differentialgleichung ergibt sich

$$\begin{aligned} 2y'' - xy' + 2y &= 2\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2} - x\sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} + 2\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} 2(k+2)(k+1)c_{k+2}x^k - \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} 2c_k x^k \\ &= 2(0+2)(0+1)c_{0+2} + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(2(k+2)(k+1)c_{k+2} - kc_k + 2c_k\Big)x^k + 2c_0 \\ &= 2c_0 + 4c_2 + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(2(k+2)(k+1)c_{k+2} - (k-2)c_k\Big)x^k\,. \end{aligned}$$

Auf der rechten Seite der Differentialgleichung steht

$$4 - x\cos x = 4 - x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} = 4 + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}x^{2n+1}\,.$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert also zum einen

$$2c_0 + 4c_2 = 4\,,$$

woraus wegen $c_0 = 0$ unmittelbar $c_2 = 1$ folgt, zum anderen

$$2(k+2)(k+1)c_{k+2} - (k-2)c_k = \begin{cases} 0\,, & k = 2n \quad (n \geqslant 1)\,, \\ (-1)^{n+1}/(2n)!\,, & k = 2n+1 \quad (n \geqslant 0)\,. \end{cases}$$

Aus der ersten Zeile hiervon ergibt sich die Rekursionsvorschrift

$$c_{2n+2} = \frac{(2n-2)c_{2n}}{2(2n+2)(2n+1)} \qquad (n \geqslant 1)\,.$$

Für $n = 1$ folgt $c_4 = 0$, und damit auch $c_6 = c_8 = \cdots = 0$. Die zweite Zeile liefert

$$c_{2n+3} = \frac{(2n-1)c_{2n+1} + (-1)^{n+1}/(2n)!}{2(2n+3)(2n+2)} \qquad (n \geqslant 0)\,.$$

Wegen $c_1 = 1$ ergeben sich dann die Werte

$$c_3 = \frac{-c_1 - 1}{12} = -\frac{1}{6} = -\frac{1}{3!}\,, \qquad c_5 = \frac{c_3 + 1/2}{40} = \frac{1/3}{40} = \frac{1}{120} = \frac{1}{5!}\,,$$

und damit kommen wir zu der Vermutung

$$c_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \qquad (n \geqslant 0)\,,$$

die wir induktiv beweisen. Der Induktionsanfang ist schon gemacht; es fehlt noch der Induktionsschluss: Gilt die Formel $c_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$ (IV) für ein $n \geqslant 0$, so folgt

$$\begin{aligned} c_{2(n+1)+1} = c_{2n+3} &= \frac{(2n-1)c_{2n+1} + (-1)^{n+1}/(2n)!}{2(2n+3)(2n+2)} \\ &\overset{\text{IV}}{=} \frac{(2n-1)(-1)^n}{2(2n+3)(2n+2)(2n+1)!} + \frac{(-1)^{n+1}}{2(2n+3)(2n+2)(2n)!} \\ &= \frac{(-1)^{n+1}(-2n+1)}{2(2n+3)!} + \frac{(-1)^{n+1}(2n+1)}{2(2n+3)!} = \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)!} = \frac{(-1)^{n+1}}{(2(n+1)+1)!}\,. \end{aligned}$$

Wir fassen die gefundenen Ergebnisse zusammen:

$$c_0 = 0\,, \quad c_2 = 1\,, \quad c_{2n} = 0 \quad (n \geqslant 2)\,, \qquad c_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \quad (n \geqslant 0)\,.$$

Damit haben wir die Lösung des Anfangswertproblems ermittelt:

$$y(x) = x^2 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, x^{2n+1} = x^2 + \sin x\,.$$

Aufgabe 2 Für $x > 0$ machen wir einen abgewandelten Potenzreihenansatz

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+\rho}\,,$$

d. h. wir suchen Zahlen c_n und ρ so, dass durch diese Reihe eine Lösung gegeben ist. Es gilt

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\rho) c_n x^{n+\rho-1}\,, \qquad y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\rho)(n+\rho-1) c_n x^{n+\rho-2}\,.$$

Folglich erhalten wir für die linke Seite der Differentialgleichung

$$\begin{aligned}
&x^2 y'' + \frac{3}{2}\, x y' + xy \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n+\rho)(n+\rho-1) c_n x^{n+\rho} + \frac{3}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (n+\rho) c_n x^{n+\rho} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+\rho+1} \\
&= \rho(\rho-1) c_0 x^{\rho} + \sum_{n=1}^{\infty} (n+\rho)(n+\rho-1) c_n x^{n+\rho} \\
&\qquad\qquad + \frac{3}{2} \rho c_0 x^{\rho} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2} (n+\rho) c_n x^{n+\rho} + \sum_{m=1}^{\infty} c_{m-1} x^{m+\rho} \\
&= \Big(\rho(\rho-1) + \frac{3}{2}\rho\Big) c_0 x^{\rho} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big((n+\rho)(n+\rho-1) c_n + \frac{3}{2} (n+\rho) c_n + c_{n-1} \Big) x^{n+\rho} \\
&= \rho(\rho+1/2) c_0 x^{\rho} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big((n+\rho)(n+\rho+1/2) c_n + c_{n-1} \Big) x^{n+\rho}\,.
\end{aligned}$$

In 1.14 wurde diese Rechnung allgemein durchgeführt. In dortiger Notation ist $p(x) = \frac{3}{2}$ und $q(x) = x$. Insbesondere gilt dann $p_0 = \frac{3}{2}$ und $q_0 = 0$, so dass die determinierende Gleichung $0 = \rho(\rho-1) + \frac{3}{2}\,\rho = \rho(\rho + \frac{1}{2})$ lautet (vgl. erster Summand). Diese hat die Lösungen $\rho_1 = 0$ und $\rho_2 = -\frac{1}{2}$. Weil ρ_1, ρ_2 reell sind und $\rho_1 - \rho_2 \notin \mathbb{N}_0$ gilt, gibt es nach dem Satz in 1.14 ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung von der Form

$$y_1(x) = x^{\rho_1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \qquad \text{und} \qquad y_2(x) = x^{\rho_2} \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$$

mit $c_0 \neq 0$, $d_0 \neq 0$ und $c_n, d_n \in \mathbb{R}$ $(n \geqslant 1)$. Um die Koeffizienten zu bestimmen, führen wir einen Koeffizientenvergleich (mit der rechten Seite $0 = \sum_{n=0}^{\infty} 0\, x^n$) durch:

Im Fall $\rho = \rho_1 = 0$ soll für alle $n \geqslant 1$ gelten

$$n(n+1/2) c_n + c_{n-1} = 0\,, \qquad \text{d. h.} \qquad c_n = -\frac{4 c_{n-1}}{(2n+1)2n}\,.$$

Wir setzen $c_0 = 1$ (alles außer Null wäre möglich). Dann liefert diese Rekursionsvorschrift

$$c_1 = -\frac{4 c_0}{3 \cdot 2} = -\frac{4}{3!}\,, \qquad c_2 = -\frac{4 c_1}{5 \cdot 4} = \frac{4^2}{5!}\,.$$

Wir vermuten $c_n = (-4)^n/(2n+1)!$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, was wir induktiv bestätigen: Der Induktionsanfang ist schon erledigt, und wenn die Formel für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gilt (IV), so folgt

$$c_{n+1} = -\frac{4c_n}{(2(n+1)+1)2(n+1)} \overset{\text{IV}}{=} -\frac{4}{(2n+3)(2n+2)} \cdot \frac{(-4)^n}{(2n+1)!} = \frac{(-4)^{n+1}}{(2n+3)!} = \frac{(-4)^{n+1}}{(2(n+1)+1)!}\,.$$

Die erste Lösung, die wir gefunden haben, lautet also

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^n}{(2n+1)!}\, x^{n+0} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \big(2\sqrt{x}\,\big)^{2n+1} = \frac{\sin(2\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}\,.$$

Nun zu $\rho = \rho_2 = -\frac{1}{2}$. In diesem Falle liefert ein Koeffizientenvergleich (vgl. Rechnung von zuvor mit d_n anstelle der c_n)

$$(n - \tfrac{1}{2})(n - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2})d_n + d_{n-1} = 0\,, \qquad \text{also} \qquad d_n = -\frac{4d_{n-1}}{2n(2n-1)} \qquad (n \geqslant 1)\,,$$

und mit $d_0 = 1$ ergibt sich dann $d_n = (-4)^n/(2n)!$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, was man völlig analog zum ersten Fall mit vollständiger Induktion bestätigt. Dies liefert die Lösung

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^n}{(2n)!}\, x^{n-1/2} = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \big(2\sqrt{x}\,\big)^{2n} = \frac{\cos(2\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,.$$

Wir haben jetzt zwei linear unabhängige Lösungen gefunden; die allgemeine Lösung lautet damit

$$y(x) = Ay_1(x) + By_2(x) = \frac{A\sin(2\sqrt{x})}{\sqrt{x}} + \frac{B\cos(2\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \qquad (A, B \in \mathbb{R})\,.$$

Bemerkung: Die Lösung, die sich für $\rho = \rho_1$ ergibt, ist eine Potenzreihe; man hätte sie daher auch mit einem normalen Potenzreihenansatz finden können.

Aufgabe 3 Durch Multiplikation der Differentialgleichung $xy'' + 7y' + \frac{9}{x}\,y = 0$ mit $x \in (0,\infty)$ erhalten wir eine äquivalente Differentialgleichung, passend zu der Form (1) in 1.14,

$$x^2y'' + 7xy' + 9y = 0\,. \tag{$*$}$$

In der Notation von 1.14 ist $p(x) = 7$ und $q(x) = 9$, so dass $p_0 = 7$ und $q_0 = 9$ ist, was auf die determinierende Gleichung $0 = \rho(\rho-1) + 7\rho + 9 = (\rho+3)^2$ führt. Diese hat nur $\rho = -3$ als Lösung. Nach dem Satz in 1.14 (mit $\rho_1 = \rho_2 = -3$) hat $(*)$ ein Fundamentalsystem der Gestalt

$$y_1(x) = x^\rho \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \qquad \text{und} \qquad y_2(x) = (\ln x)y_1(x) + x^\rho \sum_{n=1}^{\infty} d_n x^n,$$

wobei $c_0 \neq 0$ (und $d_0 = 0$; daher beginnt die Reihe im Ansatz für y_2 bei $n = 1$) mit zu berechnenden $c_n, d_n \in \mathbb{R}$ $(n \geqslant 1)$. Für $x > 0$ machen wir den abgewandelten Potenzreihenansatz

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n-3}$$

(wobei $c_0 \neq 0$ vorausgesetzt ist) und haben damit für die Ableitungen die Darstellungen

$$y_1'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n-3)c_n x^{n-4}\,, \qquad y_1''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n-3)(n-4)c_n x^{n-5}\,.$$

Also erhalten wir für die linke Seite der Differentialgleichung $(*)$

$$\begin{aligned}
x^2y_1'' + 7xy_1' + 9y_1 &= \sum_{n=0}^{\infty}(n-3)(n-4)c_n x^{n-3} \\
&\qquad + \sum_{n=0}^{\infty} 7(n-3)c_n x^{n-3} + \sum_{n=0}^{\infty} 9c_n x^{n-3} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\Big((n-3)(n-4) + 7(n-3) + 9\Big)c_n x^{n-3} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} n^2 c_n x^{n-3} .
\end{aligned}$$

Da die rechte Seite der Differentialgleichung 0 ist, folgt $c_1 = c_2 = \cdots = 0$. Setzen wir $c_0 := 1$, so haben wir die Lösung

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n-3} = \frac{1}{x^3} .$$

Wie zuvor festgestellt, kann man eine von y_1 unabhängige Lösung mit dem Ansatz

$$y_2(x) = (\ln x)y_1(x) + x^{-3}\sum_{n=1}^{\infty} d_n x^n = \frac{\ln x}{x^3} + \sum_{n=1}^{\infty} d_n x^{n-3}$$

erhalten. Wegen

$$y_2'(x) = \frac{1-3\ln x}{x^4} + \sum_{n=1}^{\infty}(n-3)d_n x^{n-4} , \qquad y_2''(x) = \frac{-7+12\ln x}{x^5} + \sum_{n=1}^{\infty}(n-3)(n-4)d_n x^{n-5} .$$

lautet hier die linke Seite der Differentialgleichung $(*)$

$$\begin{aligned}
x^2y_2'' + 7xy_2' + 9y_2 &= \frac{-7+12\ln x}{x^3} + \sum_{n=1}^{\infty}(n-3)(n-4)d_n x^{n-3} \\
&\qquad + 7\,\frac{1-3\ln x}{x^3} + \sum_{n=1}^{\infty} 7(n-3)d_n x^{n-3} + 9\,\frac{\ln x}{x^3} + \sum_{n=1}^{\infty} 9d_n x^{n-3} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\Big((n-3)(n-4) + 7(n-3) + 9\Big)d_n x^{n-3} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n^2 d_n x^{n-3} .
\end{aligned}$$

Da die rechte Seite der Differentialgleichung 0 ist, folgt $d_1 = d_2 = \cdots = 0$. Also haben wir

$$y_2(x) = \frac{\ln x}{x^3} .$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet somit

$$y(x) = \alpha y_1(x) + \beta y_2(x) = \frac{\alpha + \beta\ln x}{x^3} \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}) .$$

Alternativ: Nachdem man y_1 berechnet hat, kann man die allgemeine Lösung von $(*)$ auch mit dem Reduktionsverfahren von d'Alembert gewinnen. Der Ansatz $y(x) = y_1(x)v(x)$ führt auf

$$\begin{aligned}
x^2y'' + 7xy' + 9y &= x^2\big(y_1''v + 2y_1'v' + y_1v''\big) + 7x\big(y_1'v + y_1v'\big) + 9y_1v \\
&= \big(x^2y_1'' + 7xy_1' + 9y_1\big)v + \big(2x^2y_1' + 7xy_1\big)v' + x^2y_1v'' \\
&= \big(2x^2y_1' + 7xy_1\big)v' + x^2y_1v'' ,
\end{aligned}$$

weil y_1 eine Lösung der Gleichung $(*)$ ist. Einsetzen von $y_1(x) = \frac{1}{x^3}$ und $y_1'(x) = -3x^{-4}$ liefert

$$x^2y'' + 7xy' + 9y = \left(-\frac{6}{x^2} + \frac{7}{x^2}\right)v' + \frac{v''}{x},$$

und dies soll $= 0$ sein. Für die Funktion $w := v'$ haben wir also nach Multiplikation mit x die homogene lineare Gleichung

$$\frac{w}{x} + w' = 0$$

mit der allgemeinen Lösung

$$w(x) = a\exp\left(\int -\frac{1}{x}\,dx\right) = a\exp\bigl(-\ln x\bigr) = \frac{a}{x} \qquad (a \in \mathbb{R}).$$

(Man beachte $x > 0$.) Wegen $w = v'$ folgt daraus durch Integration

$$v(x) = a\ln x + b \qquad (a, b \in \mathbb{R}),$$

und die allgemeine Lösung der Differentialgleichung für y lautet somit

$$y(x) = y_1(x)v(x) = \frac{a\ln x + b}{x^3} \qquad (a, b \in \mathbb{R}).$$

Aufgabe 4 **a)** Offensichtlich $y = 0$ ist eine Lösung des Problems.

b) Falls y eine Lösung der Differentialgleichung ist, so gilt $y'(x) = f(y(x)) \geqslant 0$, denn f nimmt nur nicht-negative Werte an. Daher ist y monoton wachsend.

i) Es sei y eine Lösung von $y' = f(y)$ und es gelte $|y(x)| > 1$.
Idee: y löst auch die modifizierte Differentialgleichung

$$y' = \widetilde{f}(y) \qquad \text{mit } \tilde{f}(y) := y^2. \tag{1}$$

Dies ist wahr, denn $f(y) = \widetilde{f}(y)$ für alle y mit $|y| > 1$, und wir haben zusätzlich vorausgesetzt, dass $|y(x)| > 1$ für alle $x \in I$ gilt. Da $\widetilde{f}$ (im Gegensatz zu f) stetig partiell nach y differenzierbar ist, ist die Lösung von $y' = \widetilde{f}(y)$ zusammen mit einem gegebenen Anfangswert $y(x_0) = y_0$ nach dem Satz von Picard-Lindelöf eindeutig. Unsere Überlegung zeigt, dass die Funktionswerte von y eindeutig durch die folgenden drei Eigenschaften festgelegt sind:

a) y löst die ursprüngliche Differentialgleichung $y = f(y)$;

b) y erfüllt eine Anfangswertbedingung, etwa $y(x_0) = y_0$ für gewisse x_0, $y_0 \in \mathbb{R}$;

c) es gilt $|y(x)| > 1$ für alle $x \in I$.

Beispielsweise durch Trennung der Variablen sehen wir, dass die Lösung von (1) zusammen mit dem Anfangswert $y(x_0) = y_0$ folgendermaßen lautet: $y(x) = 0$, falls $y_0 = 0$, bzw. im Fall $y_0 \neq 0$

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{d\eta}{\eta^2} = \int_{x_0}^{x} dx \quad \Longleftrightarrow \quad -\frac{1}{y(x)} + \frac{1}{y_0} = x - x_0 \quad \Longleftrightarrow \quad y(x) = -(x - x_0 - \frac{1}{y_0})^{-1}.$$

ii) Wir notieren den Anfangswert $y_0 := y(x_0)$ und wenden dieselbe Idee wie bei i) an. Ist y eine Lösung von $y' = f(y)$ und gilt $0 < y(x) \leqslant 1$ für alle $x \in I$, dann ist y eine Lösung der modifizierten Differentialgleichung

$$y' = \widetilde{f}(y) \qquad \text{mit } \widetilde{f}(y) := \begin{cases} \sqrt{y} & , y \geqslant y_0, \\ \frac{1}{2\sqrt{y_0}}(y - y_0) + \sqrt{y_0} & , y < y_0. \end{cases}$$

Man beachte, dass y ja monoton wachsend ist und somit nur die erste Zeile in der Definition von $\widetilde{f}$ zum Tragen kommt. Das wichtige an der zweiten Zeile ist dann nur, dass $\widetilde{f}$ zu einer stetig differenzierbaren Funktion wird. Wieder garantiert der Satz von Picard-Lindelöf (angewandt auf die modifizierte Differentialgleichung $y' = \widetilde{f}(y)$), dass y eindeutig festgelegt ist durch:

$$y \text{ löst die ursprüngliche Differentialgleichung } y' = f(y), \quad y(x_0) = y_0, \quad 0 < y(x) \leqslant 1.$$

Und wieder bestimmen wir y mit Trennung der Variablen (vgl. auch Bsp. 2) in 1.2)

$$y(x) = \frac{(x-C)^2}{4}.$$

Dann ist $y'(x) = \frac{(x-C)}{2}$. Da $y(x) > 0$ und $y'(x) \geqslant 0$ für alle $x \in I$ gelten soll, fordern wir $C < x_0$.

Nun bestimmen wir die maximalen Lösungen des ursprünglichen Problems:

Es ist klar, dass $y \equiv 0$ eine triviale Lösung von $y' = f(y)$, $y(0) = 0$ ist.

Sei $a \in (0, \infty)$ und $y : [0, a) \to \mathbb{R}$ eine maximale, nicht fortsetzbare Lösung. Wir setzen

$$c := \sup\{x \geqslant 0 : \; y(x) = 0\}$$

und

$$d := \sup\{x \geqslant c : \; y(x) \leqslant 1\}.$$

Aus der Vorlesung wissen wir, dass $|y(x)| \to \infty$ für $x \to a-$ gilt ("Blow-up"). Daher ergibt sich $0 \leqslant c < d < a$. Aufgrund der Monotonie von y wissen wir, dass y eingeschränkt auf $(c, d]$ eine Lösung wie in Teil ii) und auf $[d, a)$ eine Lösung wie in Teil i) ist. Da bei a der Blow-up stattfinden muss, gilt $y(x) = -(x-a)^{-1}$ für alle $x \in [d, a)$. Wegen $-(x-a)^{-1} > 1 \iff x > a-1$ folgt zunächst

$$d = a - 1.$$

Da y als Lösung insbesondere stetig ist, muss $y(d) = \frac{(d-C)^2}{4} \stackrel{!}{=} -(d-a)^{-1} = 1$ gelten; somit führt Einsetzen von $d = a - 1$ und Umstellen nach C auf

$$C = a - 3.$$

Also ist $y(x) = \frac{(x-(a-3))^2}{4}$ für alle $x \in (c, d] = (c, a-1]$, was auf $c = a - 3$ führt. Die Forderung $c \geqslant 0$ ergibt schließlich $a \geqslant 3$.

Fazit: Es gilt $a \geqslant 3$ und $y\colon [0, a) \to \mathbb{R}$ ist von der Form

$$y(x) = \begin{cases} 0 & , \, x \leqslant a - 3, \\ \frac{(x-(a-3))^2}{4} & , \, x \in (a-3, a-1], \\ -(x-a)^{-1} & , \, x \in (a-1, a). \end{cases}$$

Umgekehrt kann man leicht prüfen, dass dieses y auch tatsächlich eine maximale Lösung des Anfangswertproblems $y' = f(y)$, $y(0) = 0$ ist. Zusammen mit der trivialen Lösung $y(x) = 0$, $x \in [0, \infty)$, haben wir alle maximalen Lösungen bestimmt.

Aufgabe 5 Betrachte die homogene lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0, \tag{$*$}$$

wobei $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$. Wir schreiben $z_1 := y$, $z_2 := y', \ldots, z_n := y^{(n-1)}$ und setzen

$$\vec{z}(x) := \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \\ \vdots \\ z_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}.$$

Erfüllt y die Gleichung $(*)$, so ist $\vec{z}$ eine Lösung des folgenden Systems von Differentialgleichungen erster Ordnung und umgekehrt:

$$\begin{aligned} z_1'(x) &= y'(x) = z_2(x)\,, \\ z_2'(x) &= y''(x) = z_3(x)\,, \\ &\vdots \\ z_{n-1}'(x) &= y^{(n-1)}(x) = z_n(x)\,, \\ z_n'(x) &= y^{(n)}(x) = -a_0 z_1(x) - a_1 z_2(x) - \ldots - a_{n-1} z_n(x)\,, \end{aligned}$$

also

$$\vec{z}\,'(x) = \begin{pmatrix} z_1'(x) \\ z_2'(x) \\ \vdots \\ z_{n-1}'(x) \\ z_n'(x) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}}_{=:A\in\mathbb{R}^{n\times n}} \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \\ \vdots \\ z_{n-1}(x) \\ z_n(x) \end{pmatrix} = A\vec{z}(x)\,.$$

Wir rechnen nun per vollständiger Induktion über $n \in \mathbb{N}$ nach

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0\,. \tag{+}$$

IA: Für $n = 1$ gilt $A = \begin{pmatrix}-a_0\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 1}$ und daher $\det(\lambda I - A) = \det\begin{pmatrix}\lambda + a_0\end{pmatrix} = \lambda + a_0$.

IS: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Für dieses n sei (+) erfüllt (IV). Entwickeln nach der ersten Spalte ergibt

$$\begin{aligned} \det \underbrace{(\lambda I - A)}_{\in\mathbb{R}^{n+1\times n+1}} &= \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 & & & & \\ & \lambda & -1 & & & \\ & & \lambda & -1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \lambda & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & \lambda + a_n \end{pmatrix} \\ &= \lambda \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 & & & \\ & \lambda & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & -1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & \lambda + a_n \end{pmatrix} + (-1)^{n+2} a_0 \det \begin{pmatrix} -1 & & & & \\ \lambda & -1 & & & \\ & \lambda & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & -1 \end{pmatrix} \\ &\overset{\text{IV}}{=} \lambda(\lambda^n + a_n\lambda^{n-1} + \ldots + a_2\lambda + a_1) + (-1)^{n+2} a_0 (-1)^n \\ &= \lambda^{n+1} + a_n\lambda^n + \ldots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0\,. \end{aligned}$$