Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. Ioannis Anapolitanos
Dr. Semjon Wugalter

WS 2015/2016
04.12.2015

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

4. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Bestimmen Sie mit Hilfe eines Potenzreihenansatzes die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y' + xy = 0 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

b) Lösen Sie mit einem Potenzreihenansatz das Anfangswertproblem

$$2y'' - xy' + 2y = 4 - x\cos x\,, \qquad y(0) = 0\,, \quad y'(0) = 1\,.$$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie unter Verwendung eines abgewandelten Potenzreihenansatzes die allgemeine Lösung von

$$x^2y'' + \frac{3}{2}\,xy' + xy = 0 \qquad (x > 0)\,.$$

Aufgabe 3

Berechnen Sie eine Lösung der Differentialgleichung

$$xy'' + 7y' + \frac{9}{x}\,y = 0 \qquad (x > 0)$$

mit einem abgewandelten Potenzreihenansatz. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung.

Aufgabe 4

Wir betrachten die Differentialgleichung $y' = f(y)$ mit

$$f(y) = \begin{cases} \sqrt{|y|} & , |y| \leqslant 1, \\ y^2 & , |y| > 1 \end{cases}$$

und dem Anfangswert $y(0) = 0$.

a) Begründen Sie, dass dieses Anfangswertproblem (mindestens) eine Lösung besitzt.

b) Finden Sie alle Lösungen des Anfangswertproblems $y' = f(y)$, $y(0) = 0$.

Anleitung: Zeigen Sie, dass jede Lösung monoton wachsend ist.
Es sei $I = [x_0, x_0 + \delta)$ ein Intervall und $y : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung $y' = f(y)$ mit dem Anfangswert $y(x_0) = y_0$. Wie lautet y,

i) falls $|y(x)| > 1$ für alle $x \in I$ gilt?

ii) falls $0 < y(x) \leqslant 1$ für alle $x \in I$ gilt?

Bauen Sie nun aus diesen beiden Lösungen und einer dritten trivialen Lösung die maximalen Lösungen $y : [0, a) \to \mathbb{R}$ des ursprünglichen Anfangswertproblems zusammen.

Aufgabe 5

Es seien $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$. Stellen Sie die homogene lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0 \qquad (*)$$

als System linearer Differentialgleichungen erster Ordnung dar. Schreiben Sie dazu $z_1 := y$, $z_2 := y', \ldots, z_n := y^{(n-1)}$ und $\vec{z} := (z_1, \ldots, z_n)$. Geben Sie nun eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ so an, dass $\vec{z}$ genau dann Lösung von

$$\vec{z}\,' = A\vec{z}$$

ist, wenn y die Differentialgleichung $(*)$ erfüllt. Berechnen Sie außerdem $\det(\lambda I - A)$.