

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung
Elektrotechnik und Informationstechnik

5. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Berechnen Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems:

$$u'(t) = 3u(t) + v(t) - w(t)$$

$$v'(t) = u(t) + 3v(t) - w(t)$$

$$w'(t) = 3u(t) + 3v(t) - w(t)$$

b) Bestimmen Sie jeweils ein Fundamentalsystem von

$$\text{i) } \vec{y}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \vec{y}; \quad \text{ii) } \vec{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \vec{y}.$$

Aufgabe 2

Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\vec{y}' = A\vec{y} + \vec{b}(t)$$

sowie die spezielle Lösung zu dem Anfangswert $\vec{y}(0) = \vec{y}_0$, wobei die Matrix A , die Funktion \vec{b} und der Anfangswert \vec{y}_0 gegeben sind durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 3t \\ e^{3t} \end{pmatrix}, \quad \vec{y}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\vec{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{y},$$

a) indem Sie die Matrixexponentialfunktion explizit ausrechnen;

b) indem Sie das System in *eine* Differentialgleichung 2. Ordnung umwandeln und die resultierende Gleichung lösen.

Aufgabe 4

Sei $t \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie e^{tA} für die folgenden Matrizen A :

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 42 & 1 & 2 \\ 0 & 42 & 2 \\ 0 & 0 & 42 \end{pmatrix}; \quad \text{c) } A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Hinweis zu c): Überlegen Sie sich zunächst, dass $e^{tSBS^{-1}} = Se^{tB}S^{-1}$ für alle $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und alle regulären $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt.

Frohe Weihnachten und ein gutes und erfolgreiches neues Jahr 2016!