Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. Ioannis Anapolitanos
Dr. Semjon Wugalter

WS 2015/2016
15.01.2016

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

6. Übungsblatt

Aufgabe 1

Betrachten Sie die quasilineare Gleichung

$$\partial_t u(x,t) + u(x,t)\partial_x u(x,t) = 0 \qquad (x \in \mathbb{R},\, t > 0)$$

mit der Anfangsbedingung $u(x,0) = f(x)$.

a) Es sei

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x \leqslant 0, \\ \exp(-\frac{1}{x}) & , x > 0. \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Charakteristiken $\begin{pmatrix} \vec{k} \\ w \end{pmatrix}$ der Gleichung, und leiten Sie daraus die Lösung des Problems mit dem gegebenen f her.

b) Was passiert, wenn f stetig differenzierbar, aber nicht monoton wachsend ist?

Aufgabe 2

Betrachten Sie die lineare Gleichung

$$\partial_t u(x,t) + (\cos t)\partial_x u(x,t) = 0 \qquad ((x,t) \in Q)$$

mit $Q = [0, 2\pi] \times [0, \infty)$.

a) Bestimmen Sie die Charakteristiken der Gleichung.

b) Betrachten Sie nun den Rand $R = \{0, 2\pi\} \times [0, \infty) \cup [0, 2\pi] \times \{0\}$ von Q. Durch jeden Punkt $r \in R$ verläuft genau eine Grundcharakteristik $\vec{k}$, für die also $\vec{k}(t_0) = r$ für ein t_0 gilt. Bestimmen Sie diejenigen r, bei denen die Charakteristik nach Q hineinläuft, also bei denen $\vec{k}(t_0 + h) \in Q$ für kleine $h > 0$ gilt.

Aufgabe 3

Lösen Sie das Problem

$$\partial_t u(x,t) + t u(x,t)\partial_x u(x,t) = u(x,t), \quad u(x,0) = -x,$$

und skizzieren Sie einige Grundcharakteristiken.

— bitte wenden —

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass die durch $u(\vec{x}) = \|\vec{x}\|^{-1}$ definierte Funktion u in $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ harmonisch ist.

Aufgabe 5

a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ harmonisch. Zeigen Sie, dass u lokal der Realteil einer holomorphen Funktion ist.

b) Sei $\Omega := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ und $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ definiert durch $(x,y) \mapsto \frac{x}{x^2+y^2}$. Zeigen Sie, dass u harmonisch in Ω ist, und bestimmen Sie eine holomorphe Funktion $f\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ so, dass $u = \operatorname{Re} f$ gilt.

c) Sei $\Omega := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ und $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ definiert durch $(x,y) \mapsto \ln(\sqrt{x^2+y^2})$. Zeigen Sie, dass die Aussage aus Teil a) in diesem Fall tatsächlich nur lokal gilt, d.h. dass u harmonisch in Ω ist, es aber keine holomorphe Funktion $f\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ mit $u = \operatorname{Re} f$ gibt.

Hinweis: Begründen Sie, dass f dann Stammfunktion von $z \mapsto 1/z$ auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ wäre, was bekanntlich (HM II) unmöglich ist.