Karlsruher Institut für Technologie (KIT) WS 2015/2016
Institut für Analysis
Dr. Ioannis Anapolitanos
Dr. Semjon Wugalter

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 7. Übungsblatt

Aufgabe 1 Wir betrachten die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} \partial_t u(t,x) &= \partial_{xx} u(t,x) \quad \text{für } t>0,\ x\in(0,1), \\ u(t,0) &= u(t,1) = 0 \quad \text{für } t>0, \\ u(0,x) &= f(x) \quad \text{für } x\in[0,1]. \end{aligned} \tag{1}$$

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass die Lösung von (1) gegeben ist durch

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-k^2\pi^2 t} \sin(k\pi x) \quad \text{für } x\in[0,1], t>0, \tag{2}$$

sofern f in der Form $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(k\pi x)$ für gewisse $a_k \in \mathbb{R}$ dargestellt werden kann. Dabei sollen die Koeffizienten (a_k) so sein, dass man den Reihen einen Sinn geben kann. Dies ist z.B. für $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty$ der Fall. Wir wollen den Hinweis verwenden und berechnen die Koeffizienten a_k zu dem gegebenen f mit Hilfe partieller Integration

$$\begin{aligned} a_k &= 2\int_0^1 f(x)\sin(k\pi x)\,dx = 2\int_0^{1/2} x\sin(k\pi x)\,dx + 2\int_{1/2}^1 (1-x)\sin(k\pi x)\,dx \\ &= -2\,\frac{x\cos(k\pi x)}{k\pi}\Big|_0^{1/2} + 2\int_0^{1/2}\frac{\cos(k\pi x)}{k\pi}\,dx - 2\,\frac{(1-x)\cos(k\pi x)}{k\pi}\Big|_{1/2}^1 - 2\int_{1/2}^1 \frac{\cos(k\pi x)}{k\pi}\,dx \\ &= -\frac{\cos(k\pi/2)}{k\pi} + \frac{2}{k^2\pi^2}\sin(k\pi x)\Big|_0^{1/2} + \frac{\cos(k\pi/2)}{k\pi} - \frac{2}{k^2\pi^2}\sin(k\pi x)\Big|_{1/2}^1 \\ &= \frac{4}{k^2\pi^2}\sin\Big(\frac{k\pi}{2}\Big). \end{aligned}$$

Somit ist $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k| \leqslant \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} < \infty$. Da der Ausdruck $\sin(\frac{k\pi}{2})$ für $k\in\mathbb{N}$ zyklisch die Werte $1, 0, -1, 0$ annimmt, ergibt sich nach (2) als Lösung

$$u(t,x) = \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} e^{-(2n-1)^2\pi^2 t}\sin((2n-1)\pi x) \quad \text{für } x\in[0,1], t\geqslant 0.$$

Beweis des Hinweises: *1. Schritt:* Wir zeigen, dass

$$\int_0^1 \sin(k\pi x)\sin(m\pi x)\,dx = \frac{1}{2}\,\delta_{km} := \frac{1}{2}\cdot\begin{cases} 1 & \text{falls } k=m \\ 0 & \text{falls } k\neq m \end{cases}$$

für alle $k, m \in \mathbb{N}$ gilt.

Seien $k, m\in\mathbb{N}$. Mit partieller Integration folgt

$$\int_0^1 \sin(k\pi x)\sin(m\pi x)\,dx = \underbrace{-\frac{\cos(k\pi x)}{k\pi}\sin(m\pi x)\Big|_0^1}_{=0} + \frac{m}{k}\int_0^1 \cos(k\pi x)\cos(m\pi x)\,dx. \tag{3}$$

Fall 1. Es gelte $m \neq k$. Erneute partielle Integration ergibt

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sin(k\pi x)\sin(m\pi x)\,dx &= \frac{m}{k}\int_0^1 \cos(k\pi x)\cos(m\pi x)\,dx \\
&= \frac{m}{k}\left(\underbrace{\frac{\sin(k\pi x)}{k\pi}\cos(m\pi x)\Big|_0^1}_{=0} + \frac{m}{k}\int_0^1 \sin(k\pi x)\sin(m\pi x)\,dx\right) \\
&= \frac{m^2}{k^2}\int_0^1 \sin(k\pi x)\sin(m\pi x)\,dx,
\end{aligned}$$

also

$$\left(1-\frac{m^2}{k^2}\right)\int_0^1 \sin(k\pi x)\sin(m\pi x)\,dx = 0.$$

Wegen $m \neq k$ und $k, m > 0$ gilt $1 - \frac{m^2}{k^2} \neq 0$, also folgt $\int_0^1 \sin(k\pi x)\sin(m\pi x)\,dx = 0$.

Fall 2. Es gelte $k = m$. Aus (3) ergibt sich mit $\sin^2 + \cos^2 = 1$

$$\int_0^1 \sin^2(k\pi x)\,dx = \int_0^1 \cos^2(k\pi x)\,dx = \int_0^1 \big(1 - \sin^2(k\pi x)\big)\,dx = 1 - \int_0^1 \sin^2(k\pi x)\,dx,$$

woraus durch Umstellen $\int_0^1 \sin^2(k\pi x)\,dx = \frac{1}{2}$ folgt.

2. Schritt: Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen mit $\sum_{k=1}^\infty |a_k| < \infty$. Definiere die Funktion

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sum_{k=1}^\infty a_k \sin(k\pi x).$$

Wir zeigen, dass dann $a_k = 2\int_0^1 f(x)\sin(k\pi x)\,dx$ für alle $k \in \mathbb{N}$ ist.

Beweis: Für $N \in \mathbb{N}$ und $x \in [0,1]$ definiere $f_N(x) := \sum_{k=1}^N a_k \sin(k\pi x)$. Wegen

$$\sum_{k=1}^\infty \left(\sup_{x\in[0,1]} |a_k \sin(k\pi x)|\right) \leqslant \sum_{k=1}^\infty |a_k| < \infty$$

konvergiert die Funktionenfolge $(f_N)_{N\in\mathbb{N}}$ auf $[0,1]$ gleichmäßig gegen f. Daher ist das Vertauschen von Limes und Integration in $(*)$ erlaubt. Deshalb ergibt sich für jedes $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
2\int_0^1 f(x)\sin(k\pi x)\,dx &= 2\int_0^1 \sum_{m=1}^\infty a_m \sin(m\pi x)\sin(k\pi x)\,dx \\
&\overset{(*)}{=} 2\sum_{m=1}^\infty a_m \underbrace{\int_0^1 \sin(m\pi x)\sin(k\pi x)\,dx}_{=\frac{1}{2}\delta_{km}} \\
&= a_k\,.
\end{aligned}$$

Aufgabe 2 Wir betrachten die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung mit Neumann-Randbedingungen

$$\begin{aligned}
&\partial_t u(t,x) = \partial_{xx} u(t,x) \qquad \text{für } t > 0,\ x \in (0,1), \\
&\partial_x u(t,0) = 0 = \partial_x u(t,1) \qquad \text{für } t > 0
\end{aligned}$$

und machen den Ansatz $u(t,x) = v(t)w(x)$, $t > 0$, $x \in (0,1)$. Wie im Fall von homogenen Dirichletrandbedingungen (vgl. Skript 6.5) folgt, dass ein $\lambda \in \mathbb{R}$ so existiert, dass gilt

$$\begin{aligned}
&(a) \qquad v'(t) = \lambda v(t) \\
&(b) \qquad w''(x) = \lambda w(x).
\end{aligned}$$

Die Lösung von (a) ist $v(t) = v(0)e^{\lambda t}$, die allgemeine Lösung von (b) lautet $w(x) = \alpha e^{\sqrt{\lambda}x} + \beta e^{-\sqrt{\lambda}x}$. Bei dem Ansatz $u(t,x) = v(t)w(x)$ ergibt sich für die Randbedingungen $\partial_x u(t,0) = 0 = \partial_x u(t,1)$: $v(t)w'(0) = 0 = v(t)w'(1)$, im nichttrivialen Fall $v \neq 0$ also $w'(0) = 0 = w'(1)$, d.h.

$$\begin{aligned} &(c) \qquad \sqrt{\lambda}\alpha - \sqrt{\lambda}\beta = 0 \\ &(d) \qquad \sqrt{\lambda}\alpha e^{\sqrt{\lambda}} - \sqrt{\lambda}\beta e^{-\sqrt{\lambda}} = 0. \end{aligned}$$

Setzt man (c) in (d) ein, so ergibt sich die Bedingung

$$\sqrt{\lambda}\alpha(e^{\sqrt{\lambda}} - e^{-\sqrt{\lambda}}) = 0.$$

Wir gehen weiterhin von dem nichttrivialen Fall $\lambda, \alpha \neq 0$ aus. Dann folgt

$$e^{\sqrt{\lambda}} - e^{-\sqrt{\lambda}} = 0 \iff e^{2\sqrt{\lambda}} = 1 \iff \exists\, k \in \mathbb{Z} : 2\sqrt{\lambda} = 2\pi i k \iff \exists\, k \in \mathbb{Z} : \sqrt{\lambda} = k\pi i.$$

Somit ist w von der Gestalt $w(x) = \alpha e^{k\pi i x} + \alpha e^{-k\pi i x} = 2\alpha\cos(k\pi x)$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Da cos eine gerade Funktion ist, können wir $k \in \mathbb{N}_0$ annehmen. Damit lauten die separierte-Variablen-Lösungen

$$u(t,x) = c_k e^{-k^2\pi^2 t}\cos(k\pi x) \qquad (t > 0, x \in [0,1])$$

mit $k \in \mathbb{N}_0$ und $c_k \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3 Es seien $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = f(x), x > 0, f_1(x) = 0, x \leq 0$, und seien $F(x) = f_1(x) - f_1(-x)$. Offensichtlich ist F eine ungerade Funktion. Zunächst finden wir die Lösung $v(x,t)$, $x \in \mathbb{R}, t > 0$ des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \partial_{tt}v(t,x) &= \partial_{xx}v(t,x) \quad \text{für } t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ v(0,x) &= F(x) \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \\ \partial_t v(0,x) &= 0 \text{ für } x \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{4}$$

Nach der d'Alembert-Formel ist die Lösung des Problems (7) gegeben durch

$$v(t,x) = \frac{1}{2}[F(x-t) + F(x+t)] = \frac{1}{2}[f_1(x-t) + f_1(x+t) - f_1(-x-t) - f_1(-x+t)].$$

Offensichtlich gilt $v(t,0) = 0$ für $t > 0$. Damit ist die Funktion $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $u(t,x) = v(t,x), t > 0, x > 0$ eine Lösung des Problems

$$\begin{aligned} \partial_{tt}u(t,x) &= \partial_{xx}u(t,x) \quad \text{für } t > 0,\ x \in (0,\infty), \\ u(t,0) &= 0 \quad \text{für } t > 0, \\ u(0,x) &= f(x) \quad \text{für } x \in [0,\infty), \\ \partial_t u(0,x) &= 0 \quad \text{für } x \in [0,\infty). \end{aligned}$$

Für die Lösung u gilt

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \frac{1}{2}[f(x+t) + f(x-t)] \quad \text{für } 0 < t \leqslant \frac{1}{2}, x > 0 \\ u(t,x) &= \frac{1}{2}[f(x+t) + f(x-t) - f(-x+t)] \quad \text{für } \frac{1}{2} < t \leqslant \frac{3}{2}, x > 0 \\ u(t,x) &= \frac{1}{2}[f(x+t) + f(-x+t)] \quad \text{für } t > \frac{3}{2}, x > 0. \end{aligned}$$

Aufgabe 4 Wir gehen in zwei Schritten vor:

(I) Separationsansatz $u(t,x) = v(t)w(x)$ durchführen.

(II) Sinnvolle Voraussetzungen an f und g formulieren und unter diesen das Problem lösen.

(I) Wir suchen im folgenden nur nach nicht-trivialen Lösungen, d.h. wir schließen $u(t,x) \equiv 0$ aus. Es sei $u(t,x) = v(t)w(x)$ Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\partial_{tt}u(t,x) - \partial_{xx}u(t,x) = 0 \quad \text{für } (t,x) \in \mathbb{R} \times (-\pi,\pi).$$

Setzt man $\partial_{tt}u(t,x) = v''(t)w(x)$ und $\partial_{xx}u = v(t)w''(x)$ in die Gleichung ein, so erhält man

$$v''(t)w(x) = v(t)w''(x) \quad \text{für } (t,x) \in \mathbb{R} \times (-\pi,\pi). \tag{5}$$

Wir behaupten: Es existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}$ so, dass

$$v''(t) = \lambda v(t) \quad \text{für } t \in \mathbb{R} \tag{6}$$

und

$$w''(x) = \lambda w(x) \quad \text{für } x \in (-\pi,\pi) \tag{7}$$

gilt.
Für diejenigen $t \in \mathbb{R}$ mit $v(t) = 0$ folgt aus (5), dass $v''(t)w(x) = 0$ für alle $x \in (-\pi,\pi)$ gilt. Ist $v''(t) \neq 0$, so folgt $w(x) = 0$ und damit $u(t,x) = 0$, was wir aber ausgeschlossen haben. Somit ist $v''(t) = 0$ und damit gilt für dieses t dann $v''(t) = 0 = \lambda \cdot 0 = \lambda v(t)$ sogar für alle $\lambda \in \mathbb{R}$.

Entsprechend folgt für alle x mit $w(x) = 0$, dass $w''(x) = 0 = \lambda w(x)$ gelten muss.

Für diejenigen $t \in \mathbb{R}$ mit $v(t) \neq 0$ und $x \in (-\pi,\pi)$ mit $w(x) \neq 0$ folgt aus (5)

$$\frac{v''(t)}{v(t)} = \frac{w''(x)}{w(x)}.$$

Da die linke Seite nicht von x abhängt, tut es auch die rechte Seite nicht. Da die rechte Seite nicht von t abhängt, tut es auch die linke Seite nicht. Daher existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\frac{v''(t)}{v(t)} = \lambda = \frac{w''(x)}{w(x)}.$$

Wir behaupten: $\lambda \leqslant 0$.
Wir haben $w''(x) = \lambda w(x)$. Ist $\lambda > 0$, so ist die allgemeine Lösung dieser linearen Differentialgleichung 2. Ordnung gegeben durch

$$w(x) = ae^{\sqrt{\lambda}x} + be^{-\sqrt{\lambda}x}.$$

Die Randbedingung $v(t)w(\pi) = u(t,\pi) \stackrel{!}{=} u(t,-\pi) = v(t)w(-\pi)$ impliziert, dass $w(\pi) = w(-\pi)$ gilt (sonst wäre $v(t) = 0$, was wir ja ausgeschlossen haben). Die 2. Randbedingung impliziert entsprechend, dass $w'(\pi) = w'(-\pi)$ gilt.

Die Bedingungen $w(\pi) = w(-\pi)$ und $w'(\pi) = w'(-\pi)$ bedeuten für $w(x) = ae^{\sqrt{\lambda}x} + be^{-\sqrt{\lambda}x}$

$$\begin{aligned} ae^{\sqrt{\lambda}\pi} + be^{-\sqrt{\lambda}\pi} &= ae^{-\sqrt{\lambda}\pi} + be^{\sqrt{\lambda}\pi}, \\ \sqrt{\lambda}ae^{\sqrt{\lambda}\pi} - \sqrt{\lambda}be^{-\sqrt{\lambda}\pi} &= \sqrt{\lambda}ae^{-\sqrt{\lambda}\pi} - \sqrt{\lambda}be^{\sqrt{\lambda}\pi}. \end{aligned}$$

Es ist leicht zu prüfen, dass dieses LGS in a und b für $\lambda > 0$ nur die triviale Lösung $a = b = 0$ hat (Determinante der entspr. Matrix!). Daher folgt $w \equiv 0$, was wir ja ausgeschlossen haben.

Im Fall $\lambda = 0$ ist die Lösung von $w''(x) = \lambda w(x) = 0$ gegeben durch

$$w(x) = ax + b.$$

Die periodischen Randwerte $w(\pi) = w(-\pi)$ implizieren $a = 0$.

Im Fall $\lambda < 0$ ist die Lösung von $w''(x) = \lambda w(x)$ gegeben durch

$$w(x) = a\sin(\sqrt{-\lambda}x) + b\cos(\sqrt{-\lambda}x).$$

Die Randbedingungen implizieren

$$w(\pi) = w(-\pi): \quad a\sin(\sqrt{-\lambda}\pi) + b\cos(\sqrt{-\lambda}\pi) = -a\sin(\sqrt{-\lambda}\pi) + b\cos(\sqrt{-\lambda}\pi), \tag{8}$$

$$w'(\pi) = w'(-\pi): \quad a\cos(\sqrt{-\lambda}\pi) - b\sin(\sqrt{-\lambda}\pi) = a\cos(\sqrt{-\lambda}\pi) + b\sin(\sqrt{-\lambda}\pi). \tag{9}$$

(Wir haben die zweite Zeile mit $\sqrt{-\lambda}$ dividiert und genutzt, dass sin ungerade bzw. cos gerade ist.)

Ist $\sin(\sqrt{-\lambda}\pi) \neq 0$, so folgt aus (8): $a = 0$ und aus aus (9): $b = 0$, was auf $w \equiv 0$ führt, diesen trivialen Fall hatten wir aber ausgeschlossen. Damit ist $\sin(\sqrt{-\lambda}\pi) = 0$ und somit $\sqrt{-\lambda} \in \mathbb{N}$.

Ist $\lambda = 0$, so haben wir nach (6): $v''(t) = 0$ und damit $v(t) = ct + d$.

Ist $\lambda < 0$, so wissen wir ja bereits $\sqrt{-\lambda} \in \mathbb{N}$. Dann ist die Lösung von $v''(t) = \lambda v(t)$ gegeben durch $v(t) = c\sin(\sqrt{-\lambda}t) + d\cos(\sqrt{-\lambda}t)$.

Wir fassen zusammen: Die Lösungen $w(x)$ und $v(t)$ lauten [vgl. Fall $\lambda = 0$]

$$w(x) = b \quad \text{und} \quad v(t) = ct + d \quad (b, c, d \in \mathbb{R})$$

oder [vgl. Fall $\lambda < 0$]

$$w(x) = a\sin(kx) + b\cos(kx) \quad \text{und} \quad v(t) = c\sin(kt) + d\cos(kt) \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}).$$

Daraus ergibt sich für $u(t, x) = v(t)w(x)$

$$u(t, x) = Bt + D,$$

wobei $B, D \in \mathbb{R}$, oder

$$u(t, x) = A\sin(kx)\sin(kt) + B\sin(kx)\cos(kt) + C\cos(kx)\sin(kt) + D\cos(kx)\cos(kt), \tag{10}$$

wobei $A, B, C, D \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$.

(II) Für eine Lösung der Form (10) gilt insbesondere für jedes $x \in [-\pi, \pi]$

$$u(0, x) = B\sin(kx) + D\cos(kx) \qquad \text{und} \qquad \partial_t u(t, x) = Ak\sin(kx) + Ck\cos(kx).$$

Nach (I) kann man das Problem z.B. für $f(x) = \sin x$ und $g(x) = \cos x$ lösen. Die Lösung ist dann gegeben durch $u(t, x) = \sin(x)\cos(t) + \cos(x)\sin(t)$ (hier: $k = 1, A = 0, B = 1, C = 1, D = 0$). Beispielsweise für $f(x) = \sin(3x) + 2\cos(3x)$ und $g(x) = \sin(3x) + 3\cos(3x)$ ergibt sich als Lösung $u(t, x) = \frac{1}{3}\sin(3x)\sin(3t) + \sin(3x)\cos(3t) + \cos(3x)\sin(3t) + 2\cos(3x)\cos(3t)$ (hier: $k = 3, A = \frac{1}{3}$, $B = 1, C = 1, D = 2$).

Man kann tatsächlich jede stetig differenzierbare, 2π-periodische Funktion $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zulassen. Nach dem Hinweis lassen sich diese in eine Fourierreihe entwickeln, d.h. die Zahlenfolgen $(a_k(f))_{k\in\mathbb{N}_0}$, $(b_k(f))_{k\in\mathbb{N}}$, $(a_k(g))_{k\in\mathbb{N}_0}$, $(b_k(g))_{k\in\mathbb{N}}$ sind absolut summierbar und für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\big(a_k(f)\cos(kx) + b_k(f)\sin(kx)\big), \tag{11}$$

$$g(x) = \frac{a_0(g)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\big(a_k(g)\cos(kx) + b_k(g)\sin(kx)\big). \tag{12}$$

Nun wollen wir die in (I) gefundenen Lösungen überlagern, um das Problem mit den Anfangswerten $u(0,x) = f(x)$ und $\partial_t u(0,x) = g(x)$ für $x \in [-\pi,\pi]$ zu lösen. Für $u(t,x)$ machen wir den Ansatz

$$B_0 t + D_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(kx)\sin(kt) + B_k \sin(kx)\cos(kt) + C_k \cos(kx)\sin(kt) + D_k \cos(kx)\cos(kt).$$

Dann sind

$$u(0,x) = D_0 + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin(kx) + D_k \cos(kx) \overset{!}{=} f(x) \overset{(11)}{=} \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f)\cos(kx) + b_k(f)\sin(kx)$$

und

$$\partial_t u(0,x) = B_0 + \sum_{k=1}^{\infty} kA_k \sin(kx) + kC_k \cos(kx) \overset{!}{=} g(x) \overset{(12)}{=} \frac{a_0(g)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(g)\cos(kx) + b_k(g)\sin(kx).$$

Koeffizientenvergleich ergibt für jedes $k \in \mathbb{N}$

$$A_k = \tfrac{1}{k}\, b_k(g), \qquad B_k = b_k(f), \qquad C_k = \tfrac{1}{k}\, a_k(g), \qquad D_k = a_k(f)$$

sowie $B_0 = \frac{a_0(g)}{2}$, $D_0 = \frac{a_0(f)}{2}$. Das liefert gleich mit, dass $\sum_{k=1}^{\infty}(|A_k| + |B_k| + |C_k| + |D_k|) < \infty$ ist, und somit die Reihe in unserem Ansatz absolut konvergiert. Folglich ist $u(x,t) =$

$$\frac{a_0(g)}{2}t + \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k(g)}{k}\sin(kx)\sin(kt) + b_k(f)\sin(kx)\cos(kt) + \frac{a_k(g)}{k}\cos(kx)\sin(kt) + a_k(f)\cos(kx)\cos(kt)$$

Lösung des Problems.

Bemerkung: Man könnte die Forderungen an f und g weiter abschwächen. Damit wollen wir uns aber nicht mehr beschäftigen.