

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung
Elektrotechnik und Informationstechnik

7. Übungsblatt

Aufgabe 1

Für $x \in [0, 1]$ definiere

$$f(x) := \begin{cases} x & \text{falls } 0 \leq x < 1/2, \\ 1 - x & \text{falls } 1/2 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Lösen Sie die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} \partial_t u(t, x) &= \partial_{xx} u(t, x) && \text{in } (0, \infty) \times (0, 1), \\ u(t, 0) &= u(t, 1) = 0 && \text{für } t > 0, \\ u(0, x) &= f(x) && \text{für } x \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Hinweis: Ist $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen mit $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty$ und

$$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(k\pi x),$$

dann gilt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$a_k = 2 \int_0^1 f(x) \sin(k\pi x) dx.$$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie für die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung mit Neumann-Randbedingungen

$$\begin{aligned} \partial_t u(t, x) &= \partial_{xx} u(t, x) && \text{in } (0, \infty) \times (0, 1), \\ \partial_x u(t, 0) &= 0 = \partial_x u(t, 1) && \text{für } t > 0 \end{aligned}$$

alle separierte-Variablen-Lösungen, d.h. alle Lösungen von der Gestalt $u(t, x) = v(t)w(x)$.

Aufgabe 3

Sei $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C_2(\mathbb{R}_+)$ mit $f(x) = 0$ für $|x - 1| \geq \frac{1}{2}$. Bestimmen Sie die Lösung des Problems

$$\begin{aligned} \partial_{tt} u(t, x) &= \partial_{xx} u(t, x) && \text{für } t > 0, x \in (0, \infty), \\ u(t, 0) &= 0 && \text{für } t > 0, \\ u(0, x) &= f(x) && \text{für } x \in [0, \infty), \\ \partial_t u(0, x) &= 0 && \text{für } x \in [0, \infty). \end{aligned}$$

Aufgabe 4

Führen Sie einen Separationsansatz $u(t, x) = v(t)w(x)$ für das folgende Problem durch:

$$\begin{aligned}\partial_{tt}u - \partial_{xx}u &= 0 \quad \text{für } (t, x) \in \mathbb{R} \times (-\pi, \pi), \\ u(t, \pi) &= u(t, -\pi), \quad \partial_x u(t, \pi) = \partial_x u(t, -\pi) \quad \text{für } t \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) &= f(x), \quad \partial_t u(0, x) = g(x) \quad \text{für } x \in [-\pi, \pi],\end{aligned}$$

wobei $f, g: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben sind (Wellengleichung mit periodischen Randbedingungen).

Hinweis: Verwenden Sie die Tatsache, dass man eine stetig differenzierbare, 2π -periodische Funktion $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in eine Fourierreihe entwickeln kann: Definiere

$$\begin{aligned}a_k(h) &:= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(x) \cos(kx) dx \quad (k \in \mathbb{N}_0), \\ b_k(h) &:= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(x) \sin(kx) dx \quad (k \in \mathbb{N}).\end{aligned}$$

Dann sind $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k(h)| < \infty$, $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k(h)| < \infty$ und es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$h(x) = \frac{a_0(h)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(h) \cos(kx) + b_k(h) \sin(kx)).$$