Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. I. Anapolitanos

Herbst 2016
23.09.2016

Modulprüfung / Bachelor

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Aufgabe 1 (4 + 6 Punkte)

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = 2xe^{2x}.$$

b) Geben Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' - \frac{1}{x+1}y + e^x y^2 = -\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2(x+1)}\right)e^{-x}, \qquad x > -1$$
$$y(0) = \frac{5}{2},$$

an.
Hinweis: Eine Lösung der Differentialgleichung (ohne Anfangswert) ist gegeben durch $\phi(x) = \frac{1}{2}e^{-x}$.

Aufgabe 2 (5 + 5 Punkte)

a) Bestimmen Sie mittels des Potenzreihenansatzes $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$y''(x) + xy'(x) + y(x) = 1 + 2x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0,$$

das heißt geben Sie die Koeffizienten a_n explizit an.

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$x^2y''(x) - 2(x+1)xy'(x) + 2(x+1)y(x) = 0, \quad x > 0.$$

Hinweis: Eine Lösung der Differentialgleichung ist gegeben durch $y_1(x) = x$.

– bitte wenden –

Aufgabe 3 (7 + 3 Punkte)

a) **(i)** Gegeben sei die Matrix $A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem von $\vec{y}\,' = A\vec{y}$.

<u>Hinweis</u>: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $\det(A-\lambda I) = -(\lambda-1)^2(\lambda+1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, wobei I die Einheitsmatrix in $\mathbb{R}^{3\times 3}$ ist.

(ii) Überführen Sie das Differentialgleichungssystem

$$\begin{cases} w_1''(t) = 2w_1'(t) - w_2(t), \\ w_2'(t) = w_1(t) - w_2(t) + w_1'(t), \end{cases} \tag{1}$$

für $t \in \mathbb{R}$ in das System erster Ordnung aus Teil **(i)**. Geben Sie dann die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems (1) an.

b) Wir betrachten die Matrix $B := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Gegeben ist, dass $e^{Bt} = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\vec{y}\,' = B\vec{y} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4 (8 + 2 Punkte) Wir betrachten das Randwertproblem

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & x \in (0,\pi), \quad t > 0, \\ u(0,t) = u(\pi,t), & \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t), \quad t > 0. \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie alle Lösungen u des Randwertproblems der Form $u(x,t) = v(x)w(t)$.

b) Lösen Sie das obige Randwertproblem mit der zusätzlichen Anfangsbedingung

$$u(x,0) = \sin(2x) + \cos(4x), \quad x \in [0,\pi].$$

Viel Erfolg!

Nach der Klausur:

Die Klausurergebnisse finden Sie ab **17.10.2016** unter `http://www.math.kit.edu/iana1/` .
Die Klausureinsicht findet am Donnerstag, den **20.10.2016**, von 16 bis 18 Uhr im Hörsaal neue Chemie (Geb.30.46) statt.

Die müdlichen Nachprüfungen sind in der Woche vom **24.10.2016** bis **28.10.2016**.